4. Определить корреляционную функцию бозе-газа при $T < T_0$.

Решение. При $T < T_0$ конечная доля числа частиц ($N_{\varepsilon=0}$) находится в состояниях с $\mathbf{p}=0$ (конденсат). Возвращаясь к выражению (117,4) надо предварительно (до перехода от суммирования к интегрированию) выделить в нем члены с равным нулю $\mathbf{p}$ или $\mathbf{p}'$, учитывая при этом, что число частиц в каждом из квантовых состояний с $\mathbf{p}=0$: $n_{\mathbf{p}=0}=N_{\varepsilon=0}/g$. После этого сумма преобразуется, как это было сделано в тексте, и в результате вместо (117,7) находим

$$\nu(r)=\frac{2n_0}{\bar{n}}I+\frac{g}{\bar{n}}I^2,\qquad I=\int e^{i\mathbf{pr}/\hbar}\bar{n}_{\mathbf{p}}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

(где $n_0=N_{\varepsilon=0}/g$), причем $\bar{n}_{\mathbf{p}}$ дается формулой распределения Бозе с $\mu=0$:

$$\bar{n}_{\mathbf{p}}=\left[e^{\varepsilon/T}-1\right]^{-1}.$$

На расстояниях $r\gg\hbar/\sqrt{mT}$ интеграл $I=mT/2\pi\hbar^2 r$ (формула из предыдущей задачи с $\mu=0$), так что

$$\nu(r)=\frac{mTn_0}{\pi\bar{n}\hbar^2 r}+\frac{gm^2T^2}{4\pi^2\bar{n}\hbar^4r^2};$$

вторым членом можно пренебречь, если только T не слишком близко к T_0 (так что n_0 не слишком мало). В обратном случае, на расстояниях $r\ll\hbar/\sqrt{mT}$, интеграл

$$I\approx\int\bar{n}_{\mathbf{p}}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{\bar{n}-n_0}{g},$$

так что

$$\nu(r)\approx\nu(0)=\frac{\bar{n}^2-n_0^2}{g\bar{n}}.$$

Отметим, что интеграл $\int\nu\,dV$ для бозе-газа при $T<T_0$ расходится, и потому вычисление по формуле (116,5) привело бы к бесконечному значению флуктуации числа частиц — в соответствии с замечанием, сделанным уже в § 113.

§ 118. Корреляция флуктуаций во времени

Рассмотрим какую-либо физическую величину, характеризующую находящуюся в термодинамическом равновесии замкнутую систему или ее отдельную часть (в первом случае это не должна быть величина, остающаяся для замкнутой системы по определению постоянной, например, ее энергия). С течением времени эта величина испытывает небольшие изменения, флуктуируя вокруг своего среднего значения. Обозначим снова посредством $x(t)$ разность между этой величиной и ее средним значением (так что $\bar{x}=0$).

Между значениями $x(t)$ в разные моменты времени существует некоторая корреляция; это значит, что значение x в некоторый момент времени t влияет на вероятности различных ее значений в другой момент времени t'. Аналогично пространственной корреляции, рассмотренной в предыдущих параграфах, можно характеризовать временную корреляцию средним значением произведения $\langle x(t)\, x(t')\rangle$. Усреднение понимается здесь, как обычно, в статистическом смысле, т. е. как усреднение по вероятностям всех значений, которые может иметь величина x в моменты t и t'. Как было указано еще в § 1, такое статистическое усреднение эквивалентно усреднению по времени,— в данном случае по одному из времен t, t' при заданной разности $t'-t$. Получающаяся таким образом величина

$$\varphi(t'-t) = \langle x(t)\, x(t')\rangle \tag{118,1}$$

зависит только от разности $t'-t$; это определение можно поэтому записать и в виде

$$\varphi(t) = \langle x(0)\, x(t)\rangle. \tag{118,2}$$

При неограниченном увеличении разности времен корреляция, очевидно, исчезает, и соответственно этому функция $\varphi(t)$ стремится к нулю. Отметим также, что ввиду очевидной симметрии определения (118,1) по отношению к перестановке t и t' функция $\varphi(t)$ четна:

$$\varphi(t) = \varphi(-t). \tag{118,3}$$

Рассматривая величину $x(t)$ как функцию времени, мы тем самым подразумеваем, что она ведет себя классическим образом. Написанное определение можно, однако, представить и в форме, применимой и к квантовым величинам. Для этого надо рассматривать вместо величины x ее квантовомеханический, зависящий от времени (гейзенберговский) оператор $\hat{x}(t)$. Операторы $\hat{x}(t)$ и $\hat{x}(t')$, относящиеся к разным моментам времени, вообще говоря, не коммутативны, и корреляционная функция должна быть теперь определена как

$$\varphi(t'-t) = \frac{1}{2}\langle \hat{x}(t)\,\hat{x}(t') + \hat{x}(t')\,\hat{x}(t)\rangle, \tag{118,4}$$

где усреднение производится по точному квантовому состоянию [1]).

Предположим, что величина x такова, что заданием ее определенного значения (существенно превышающего ее среднюю флуктуацию $\langle x^2\rangle^{1/2}$) могло бы характеризоваться определенное состояние неполного равновесия. Другими словами, время релаксации для установления неполного равновесия при заданном значении x предполагается много меньшим времени релаксации для установ-

[1]) Снова напомним, что, согласно основным принципам статистики, результат усреднения не зависит от того, производится ли оно механически по точной волновой функции стационарного состояния системы или же статистически с помощью распределения Гиббса. Единственная разница состоит в том, что в первом случае результат выражается через энергию тела, а во втором случае — как функция его температуры.

ления равновесного значения самой величины x. Это условие удовлетворяется для широкой категории величин, представляющих физический интерес. Флуктуации таких величин мы будем называть *квазистационарными*[1]). Ниже в этом параграфе рассматриваются флуктуации этого типа и, кроме того, величина x предполагается классической[2]).

Предположим также, что в процессе приближения к полному равновесию в системе не возникает никаких других отклонений от равновесия, которые бы требовали введения новых величин для своего описания. Другими словами, в каждый момент времени состояние неравновесной системы вполне определяется значением x (более общий случай будет рассмотрен в следующем параграфе).

Пусть величина x имеет в некоторый момент времени t значение, большое по сравнению со средней флуктуацией, т. е. система существенно неравновесна. Тогда можно утверждать, что в последующие моменты времени система будет стремиться прийти в состояние равновесия, соответственно чему x будет уменьшаться. При этом в силу сделанных предположений скорость изменения величины x будет в каждый момент времени целиком определяться значением самого x в этот момент: $\dot{x} = \dot{x}(x)$. Если x все же сравнительно мало, то можно разложить $\dot{x}(x)$ по степеням x и ограничиться линейным членом

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x, \tag{118,5}$$

где λ — положительная постоянная; член нулевого порядка в этом разложении отсутствует, поскольку в полном равновесии (т. е. при $x = 0$) скорость dx/dt должна обратиться в нуль. Уравнение (118,5) представляет собой линеаризованное макроскопическое «уравнение движения» неравновесной системы, описывающее процесс ее релаксации (физическая природа которого целиком зависит от природы величины x). Постоянная $1/\lambda$ определяет порядок величины времени релаксации для установления полного равновесия.

Возвращаясь к флуктуациям в равновесной системе, введем величину $\xi_x(t)$, определив ее как среднее значение величины x в момент времени $t > 0$ при условии, что в предшествующий момент $t = 0$ она имела некоторое заданное значение x; такое среднее значение, вообще говоря, отлично от нуля. Очевидно, что корреляционная функция $\varphi(t)$ может быть написана с помощью функции $\xi_x(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \langle x \xi_x(t) \rangle, \tag{118,6}$$

---

[1]) Этот термин представляется более адекватным, чем использованное в предыдущем издании книги название таких флуктуаций термодинамическими.

[2]) Окончательные формулы для квазистационарных флуктуаций квантовых величин получаются из формулы для классических величин лишь простым изменением, которое будет указано в § 124 (см. (124, 19)).

где усреднение производится уже только по вероятностям различных значений x в исходный момент времени $t=0$.

Для значений ξ_x, больших по сравнению со средней флуктуацией, из уравнения (118,5) следует, что и

$$\frac{d\xi_x(t)}{dt}=-\lambda\xi_x(t), \quad t>0. \tag{118,7}$$

Учитывая усредненный характер величины $\xi_x(t)$, следует считать, что это уравнение тем самым справедливо и при произвольных малых ее значениях. Интегрируя уравнение и помня, что по определению $\xi_x(0)=x$, найдем

$$\xi_x(t)=xe^{-\lambda t},$$

и, наконец, подставляя в (118,6), получим формулу, определяющую функцию временной корреляции:

$$\varphi(t)=\langle x^2\rangle e^{-\lambda t}.$$

В таком виде, однако, эта формула относится только к $t>0$, так как в ее выводе (уравнение (118,7)) существенно предполагалось, что момент t следует после $t=0$. Учитывая, с другой стороны, четность функции $\varphi(t)$, можно написать окончательную формулу

$$\varphi(t)=\langle x^2\rangle e^{-\lambda|t|}=\frac{1}{\beta}e^{-\lambda|t|} \tag{118,8}$$

($\langle x^2\rangle$ из (110,5)), применимую как при положительных, так и отрицательных t. Эта функция имеет при $t=0$ две различные производные. Это свойство возникло в результате того, что мы рассматриваем промежутки времени, большие по сравнению со временем установления неполного равновесия (равновесия при заданном значении x). Рассмотрение меньших времен, невозможное в рамках «квазистационарной» теории, привело бы, разумеется, к равенству $d\varphi/dt=0$ при $t=0$, как и должно быть для всякой четной функции от t с непрерывной производной.

Изложенную теорию можно сформулировать еще и в другом виде, который может представить определенные преимущества.

Уравнение $\dot{x}=-\lambda x$ для самой величины x (а не для ее среднего значения ξ_x) справедливо, как уже указывалось, лишь при больших по сравнению со средней флуктуацией значениях x. При произвольных же значениях x напишем $\dot{x}$ в виде

$$\dot{x}=-\lambda x+y, \tag{118,9}$$

являющемся определением новой величины y. Хотя по абсолютной величине размаха испытываемых ею колебаний величина y отнюдь не меняет с течением времени своего характера, но при больших (в указанном выше смысле) значениях x она представляет относительно малую величину, которой в уравнении (118,9) можно пренебречь. Введенную таким образом в уравнение (118,9) величину y (которую называют *случайной силой*) надо рассматривать как источник флуктуаций величины x. При этом корреляционная функция случайной силы $\langle y(0)\, y(t)\rangle$ должна быть задана таким образом, чтобы она приводила к правильному результату (118,8) для $\langle x(0)\, x(t)\rangle$. Для этого надо положить

$$\langle y(0)\, y(t)\rangle = 2\lambda \langle x^2\rangle\, \delta(t) = \frac{2\lambda}{\beta}\, \delta(t). \qquad (118{,}10)$$

В этом легко убедиться, написав решение уравнения (118,9):

$$x(t) = e^{-\lambda t} \int\limits_{-\infty}^{t} y(\tau)\, e^{\lambda\tau}\, d\tau,$$

и усреднив произведение $x(0)\, x(t)$, представив его предварительно в виде двойного интеграла.

Тот факт, что выражение (118,10) обращается в нуль при $t \neq 0$, означает, что значения величины $y(t)$ в различные моменты времени не коррелированы. В действительности, разумеется, это утверждение является приближенным и означает лишь, что значения $y(t)$ коррелируют на протяжении промежутков времени порядка времени установления неполного равновесия (равновесия при заданном x), которое в излагаемой теории, как уже отмечалось, рассматривается как пренебрежимое малое.

§ 119. Временная корреляция флуктуаций нескольких величин

Полученные в предыдущем параграфе результаты можно обобщить на флуктуации, в которых отклоняются от своих равновесных значений сразу несколько величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Снова будем считать, что из этих величин уже вычтены их равновесные значения, так что все средние значения $\bar{x}_i = 0$.

Корреляционные функции флуктуаций этих величин определяются (в классической теории) как

$$\varphi_{ik}(t'-t) = \langle x_i(t')\, x_k(t)\rangle. \qquad (119{,}1)$$

Уже в силу самого этого определения они обладают очевидным свойством симметрии

$$\varphi_{ik}(t) = \varphi_{ki}(-t). \qquad (119{,}2)$$

Существует, однако, еще и другое свойство симметрии корреляционных функций, имеющее глубокий физический смысл. Оно возникает как следствие симметрии уравнений механики, которыми описывается движение частиц тела, по отношению