ляет относительно малую величину, которой в уравнении (118,9) можно пренебречь. Введенную таким образом в уравнение (118,9) величину y (которую называют *случайной силой*) надо рассматривать как источник флуктуаций величины x. При этом корреляционная функция случайной силы $\langle y(0)\, y(t)\rangle$ должна быть задана таким образом, чтобы она приводила к правильному результату (118,8) для $\langle x(0)\, x(t)\rangle$. Для этого надо положить

$$\langle y(0)\, y(t)\rangle = 2\lambda \langle x^2\rangle \delta(t) = \frac{2\lambda}{\beta}\delta(t). \tag{118,10}$$

В этом легко убедиться, написав решение уравнения (118,9):

$$x(t) = e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, e^{\lambda\tau}\, d\tau,$$

и усреднив произведение $x(0)\, x(t)$, представив его предварительно в виде двойного интеграла.

Тот факт, что выражение (118,10) обращается в нуль при $t \neq 0$, означает, что значения величины $y(t)$ в различные моменты времени не коррелированы. В действительности, разумеется, это утверждение является приближенным и означает лишь, что значения $y(t)$ коррелируют на протяжении промежутков времени порядка времени установления неполного равновесия (равновесия при заданном x), которое в излагаемой теории, как уже отмечалось, рассматривается как пренебрежимое малое.

§ 119. Временная корреляция флуктуаций нескольких величин

Полученные в предыдущем параграфе результаты можно обобщить на флуктуации, в которых отклоняются от своих равновесных значений сразу несколько величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Снова будем считать, что из этих величин уже вычтены их равновесные значения, так что все средние значения $\overline{x}_i = 0$.

Корреляционные функции флуктуаций этих величин определяются (в классической теории) как

$$\varphi_{ik}(t'-t) = \langle x_i(t')\, x_k(t)\rangle. \tag{119,1}$$

Уже в силу самого этого определения они обладают очевидным свойством симметрии

$$\varphi_{ik}(t) = \varphi_{ki}(-t). \tag{119,2}$$

Существует, однако, еще и другое свойство симметрии корреляционных функций, имеющее глубокий физический смысл. Оно возникает как следствие симметрии уравнений механики, которыми описывается движение частиц тела, по отношению к обращению времени[1]). В силу этой симметрии совершенно безразлично, какую из величин x_i и x_k брать при усреднении в более ранний, а какую — в более поздний момент времени. Поэтому $\langle x_i(t')\, x_k(t)\rangle = \langle x_i(t)\, x_k(t')\rangle$, т. е.

$$\varphi_{ik}(t) = \varphi_{ik}(-t). \tag{119,3}$$

Из обоих свойств (119,2—3) следует также, что $\varphi_{ik}(t) = \varphi_{ki}(t)$.

В этом выводе молчаливо подразумевалось, что сами величины x_i таковы, что при изменении знака времени они остаются неизменными. Но существуют также и величины, которые сами меняют знак при обращении времени (например, величины, пропорциональные скоростям каким-либо макроскопических движений). Если обе величины x_i и x_k обладают таким свойством, то соотношение (119,3) будет по-прежнему справедливым. Если же одна из двух величин меняет знак, а другая остается неизменной, то симметрия по отношению к обращению времени означает, что $\langle x_i(t')\, x_k(t)\rangle = -\langle x_i(t)\, x_k(t')\rangle$, т. е.

$$\varphi_{ik}(t) = -\varphi_{ik}(-t). \tag{119,4}$$

Вместе с (119,2) отсюда следует: $\varphi_{ik}(t) = -\varphi_{ki}(t)$.

Будем предполагать теперь, как и в предыдущем параграфе, что флуктуации квазистационарны, т. е. набор значений величин $x_1, \ldots, x_n$ (выходящих за границы их средних флуктуаций) определяет некоторое макроскопическое состояние неполного равновесия. В процессе приближения к полному равновесию величины x_i меняются со временем; предполагается, что набор функций $x_i(t)$ полностью характеризует этот процесс, и никаких других отклонений от равновесия в нем не возникает. Тогда скорости изменения величин x_i в каждом неравновесном состоянии являются функциями от значений $x_1, \ldots, x_n$ в этом состоянии:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_1, \ldots, x_n). \tag{119,5}$$

Если система находится в состоянии, сравнительно близком к полному равновесию (т. е. если величины x_i можно считать малыми), можно разложить функции (119,5) по степеням x_i, ограничившись членами первого порядка, т. е. представить их в виде линейных сумм

$$\dot{x}_i = -\lambda_{ik} x_k \tag{119,6}$$

с постоянными коэффициентами λ_{ik}[2]); эти выражения обобщают уравнение (118,5).

Отсюда можно перейти к уравнениям для корреляционных функций так же, как это было сделано в § 118. Вводим средние

---

[1]) Подразумевается, что система не находится в магнитном поле и не вращается как целое (см. ниже в § 120).

[2]) Как и в § 111, по дважды повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до n.

значения $\xi_i(t)$ величин x_i в момент времени $t>0$ при заданных значениях всех $x_1, x_2, \ldots$ в предшествующий момент $t=0$ (сами эти значения в обозначении $\xi_i(t)$ для краткости опускаются). Эти величины удовлетворяют тем же уравнениям (119,6):

$$\dot{\xi}_i = -\lambda_{ik}\xi_k, \tag{119,7}$$

причем уже не только для больших (по сравнению со средними флуктуациями), но и для произвольных малых значений $\xi_i(t)$. Корреляционные функции получаются из $\xi_i(t)$ умножением на $x_l = x_l(0)$ и усреднением по вероятностям различных значений x_l: $\varphi_{il}(t) = \langle\xi_i(t)\, x_l\rangle$. Произведя эту операцию с уравнением (119,7), получим

$$\frac{d}{dt}\varphi_{il}(t) = -\lambda_{ik}\varphi_{kl}(t), \qquad t>0 \tag{119,8}$$

(индекс l в этой системе уравнений свободный).

Как уже указывалось, уравнения (119,6) представляют собой не что иное, как линеаризованные макроскопические «уравнения движения» неравновесной системы, описывающие процесс ее релаксации. Мы видим, что система уравнений для корреляционных функций флуктуаций получается просто заменой в этих «уравнениях движения» величин $x_i(t)$ на функции $\varphi_{il}(t)$ со «свободным» индексом l, пробегающим все значения от 1 до n. Получающиеся таким образом уравнения относятся к временам $t>0$ и должны быть проинтегрированы при «начальном условии»

$$\varphi_{ik}(0) = \langle x_i(0)\, x_k(0)\rangle \equiv \langle x_i x_k\rangle = \beta^{-1}_{ik} \tag{119,9}$$

(средние значения $\langle x_i x_k\rangle$ должны быть равны своим известным значениям (111,9)). Для времен же $t<0$ корреляционные функции определяются затем непосредственно по их свойствам симметрии.

§ 120. Симметрия кинетических коэффициентов

Вернемся снова к макроскопическим уравнениям (119,6), описывающим релаксацию слабо неравновесной системы[1]):

$$\dot{x}_i = -\lambda_{ik}x_k. \tag{120,1}$$

[1]) В конкретных применениях встречаются случаи, когда полное равновесие, о приближении к которому идет речь, зависит от каких-либо внешних параметров (например, объема, внешнего поля и т. п.), которые сами медленно меняются со временем; вместе с ними меняются и равновесные (средние) значения рассматриваемых величин. Если это изменение достаточно медленно, то можно по-прежнему пользоваться всеми излагаемыми соотношениями, с той лишь разницей, что средние значения $\bar{x}_i$ нельзя условиться считать равными все время нулю; обозначая их посредством $x_i^{(0)}$, надо будет писать вместо (120,1)

$$\dot{x}_i = -\lambda_{ik}(x_k - x_k^{(0)}). \tag{120,1a}$$