(см. (20,8))[1]). Полагая также $R_{\min}=\Delta E-T_0\Delta S+P_0\Delta V$ (где E, S, V относятся к телу, а T_0, P_0—температура и давление среды), получим

$$\dot{E}-T_0\dot{S}+P_0\dot{V}=-2fT_0. \qquad (120,17)$$

В частности, если отклонение от равновесия происходит при постоянных (равных T_0 и P_0) температуре и давлении, то

$$\dot{\Phi}=-2fT, \qquad (120,18)$$

а при постоянных температуре и объеме

$$\dot{F}=-2fT. \qquad (120,19)$$

§ 121. Диссипативная функция

Макроскопическое движение тел, погруженных во внешнюю среду, сопровождается, вообще говоря, необратимыми процессами трения, приводящими в конце концов к прекращению движения. Кинетическая энергия тел при этом переходит в тепло, или, как говорят, *диссипирует*.

Чисто механическое рассмотрение такого движения, очевидно, невозможно; поскольку энергия макроскопического движения переходит в энергию теплового движения молекул тела и среды, то такое рассмотрение требовало бы составления уравнений движения для всех этих частиц. Поэтому вопрос о возможности составления таких уравнений движения в среде, которые бы содержали лишь макроскопические координаты тел, относится к области статистики.

Эта задача, однако, не может быть решена в общем виде. Поскольку внутреннее движение атомов тела зависит не только от движения тела в данный момент времени, но и от предыдущей истории этого движения, в уравнения движения будут, вообще говоря, входить не только макроскопические координаты тел Q_1, Q_2, ..., Q_s и их первые и вторые производные по времени, но и все производные высших порядков (точнее—функции $Q_i(t)$ войдут под действием некоторого интегрального оператора). Функции Лагранжа для макроскопического движения системы при этом, конечно, не существует, и уравнения движения в различных случаях будут иметь совершенно различный характер.

Форма уравнений движения может быть установлена в общем виде для случая, когда можно считать, что заданием координат

---

[1]) Благодаря этому соотношению между изменением энтропии и $R_{\min}$ определение величин X_i можно написать также и в виде

$$X_i=\frac{1}{T_0}\frac{\partial R_{\min}}{\partial x_i}, \qquad (120,2a)$$

который иногда удобнее, чем определение (120,2) (ср. (22,7)).

Q_i и скоростей $\dot{Q}_i$ состояние системы в данный момент времени определяется полностью, и производными высших порядков можно пренебречь (более точно критерий малости должен устанавливаться в каждом конкретном случае). Кроме того, мы будем считать, что сами скорости $\dot{Q}_i$ достаточно малы, так что их высшими степенями можно пренебрегать. Наконец, предположим, что движение представляет собой малые колебания около некоторых положений равновесия — случай, с которым в этой связи обычно и приходится иметь дело; при этом условимся считать координаты Q_i выбранными таким образом, чтобы в положении равновесия было $Q_i=0$. Тогда кинетическая энергия системы $K(\dot{Q}_i)$ будет квадратичной функцией скоростей $\dot{Q}_i$, не зависящей от самих координат Q_i; потенциальная же энергия $U(Q_i)$, связанная с действием внешних сил, будет квадратичной функцией координат Q_i.

Введем обобщенные импульсы P_i, определив их, как обычно, посредством

$$P_i=\frac{\partial K(\dot{Q}_i)}{\partial \dot{Q}_i}. \tag{121,1}$$

Эти равенства определяют импульсы в виде линейных комбинаций скоростей. Выразив при помощи них скорости через импульсы и подставив в кинетическую энергию, получим последнюю в виде квадратичной функции импульсов, причем будут иметь место равенства

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial K(P_i)}{\partial P_i}. \tag{121,2}$$

Если пренебречь процессами диссипации полностью, то уравнения движения будут обычными уравнениями механики, согласно которым производные импульсов по времени равны соответствующим обобщенным силам:

$$\dot{P}_i=-\frac{\partial U}{\partial Q_i}. \tag{121,3}$$

Прежде всего отметим, что уравнения (121,2—3) находятся в формальном соответствии с принципом симметрии кинетических коэффициентов, если под введенными в § 120 величинами x_1, x_2, ..., x_{2s} понимать координаты Q_i и импульсы P_i. Действительно, минимальная работа, необходимая для приведения тел из состояния покоя в положениях равновесия в положения Q_i с импульсами P_i, есть $R_{\min}=K(P_i)+U(Q_i)$. Поэтому роль величин X_1, X_2, ..., X_{2s} будут играть производные (см. примечание на стр. 401):

$$X_{Q_i}=\frac{1}{T}\frac{\partial R_{\min}}{\partial Q_i}=\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial Q_i},\quad X_{P_i}=\frac{1}{T}\frac{\partial R_{\min}}{\partial P_i}=\frac{1}{T}\frac{\partial K}{\partial P_i},$$

а уравнения (121,2—3) будут соответствовать соотношениям (120,5) причем

$$\gamma_{Q_i P_i} = -T = -\gamma_{P_i Q_i}$$

в соответствии с правилом (120,12) (мы имеем здесь дело со случаем, когда одна из величин (Q_i) остается неизменной при изменении знака времени, а другая (P_i)—меняет знак).

В соответствии с общими соотношениями (120,5) мы можем теперь написать уравнения движения с учетом процессов диссипации, прибавив к правым сторонам равенств (121,2—3) некоторые дополнительные линейные комбинации величин X_{Q_i}, X_{P_i}, причем таким образом, чтобы была соблюдена требуемая симметрия кинетических коэффициентов. Легко, однако, видеть, что равенства (121,2) следует оставить неизменными; действительно, эти равенства представляют собой просто следствие определения импульсов (121,1), не имеющего отношения к наличию или отсутствию процессов диссипации. Тем самым устанавливается, что к равенствам (121,3) можно добавить линейные комбинации лишь величин X_{P_i} (т. е. производных $\partial K/\partial P_i$); в противном случае нарушится симметрия кинетических коэффициентов.

Таким образом, получаем систему равенств вида

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial U}{\partial Q_i} - \sum_{k=1}^{s} \gamma_{ik} \frac{\partial K}{\partial P_k},$$

где постоянные коэффициенты γ_{ik} связаны соотношениями

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}. \tag{121,4}$$

Заменив $\frac{\partial K}{\partial P_k} = \dot{Q}_k$, напишем окончательно:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial U}{\partial Q_i} - \sum_{k=1}^{s} \gamma_{ik} \dot{Q}_k. \tag{121,5}$$

Это и есть искомая система уравнений движения. Мы видим, что наличие процессов диссипации приводит в рассматриваемом приближении к появлению дополнительных *сил трения*, линейно зависящих от скоростей движения. Вследствие соотношения (121,4) эти силы можно написать в виде производных по соответствующим скоростям от квадратичной функции

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \gamma_{ik} \dot{Q}_i \dot{Q}_k, \tag{121,6}$$

называемой *диссипативной функцией*. Тогда

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial U}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_i}. \tag{121,7}$$

Введя функцию Лагранжа $L=K-U$, можно написать эти уравнения движения в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}-\frac{\partial L}{\partial Q_i}=-\frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_i}, \tag{121,8}$$

которая отличается от обычной формы уравнений Лагранжа стоящей в правой стороне производной от диссипативной функции.

Наличие трения приводит к уменьшению полной механической энергии $(K+U)$ движущихся тел. В соответствии с общими результатами § 120 скорость этого уменьшения определяется диссипативной функцией. Ввиду некоторого различия в обозначениях здесь и в § 120, покажем это заново. Имеем

$$\frac{d}{dt}(K+U)=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial K}{\partial P_i}\dot{P}_i+\frac{\partial U}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right)=\sum_i \dot{Q}_i\left(\dot{P}_i+\frac{\partial U}{\partial Q_i}\right),$$

или, подставив (121,7) и имея в виду квадратичность диссипативной функции,

$$\frac{d}{dt}(K+U)=-\sum_i \dot{Q}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_i}=-2f, \tag{121,9}$$

как и должно было быть.

Укажем в заключение, что при наличии внешнего магнитного поля уравнения движения по-прежнему имеют вид (121,5), с той лишь разницей, что вместо (121,4) будет

$$\gamma_{ik}(\mathbf{H})=\gamma_{ki}(-\mathbf{H}).$$

Благодаря этому, однако, не будет существовать диссипативной функции, производные от которой определяли бы силы трения; поэтому уравнения движения не смогут быть написаны в виде (121,7).

§ 122. Спектральное разложение флуктуаций

Введем спектральное разложение флуктуирующей величины $x(t)$ по обычным формулам разложения Фурье:

$$x_\omega=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{i\omega t}\,dt, \tag{122,1}$$

и обратно

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{122,2}$$

Следует заметить, что интеграл (122,1) фактически расходится, поскольку $x(t)$ не стремится к нулю при $|t|\to\infty$. Это обстоя-