чем $nd$. Это значит, что винтовая ось $n$-го порядка может быть связана только с переносами на расстояния

$$d=\frac{p}{n}a \qquad (p=1, 2, \ldots, n-1),$$

где $a$ — наименьший период решетки в направлении оси. Так, винтовая ось 2-го порядка может быть только одного типа — с переносом на половину периода; винтовые оси 3-го порядка могут быть связаны с переносом на $^1/_3$ и $^2/_3$ периода и т. д.

Аналогично можно скомбинировать трансляции с плоскостью симметрии. Отражение в плоскости вместе с трансляцией вдоль направления, перпендикулярного к плоскости, не приводит к новым элементам симметрии, так как такое преобразование, как легко убедиться, равносильно простому отражению в другой плоскости, параллельной первой. Комбинирование же отражения с переносом вдоль направления, лежащего в самой плоскости отражения, приводит к новому типу элементов симметрии — так называемым *плоскостям зеркального скольжения*. Решетка обладает плоскостью зеркального скольжения, если она совмещается сама с собой при отражении в этой плоскости и одновременном переносе на определенное расстояние $d$ в определенном направлении, лежащем в этой же плоскости. Двукратное отражение в плоскости зеркального скольжения приводит к простому переносу на расстояние $2d$. Поэтому ясно, что решетка может обладать только такими плоскостями зеркального скольжения, в которых величина трансляции равна $d=a/2$, где $a$ — длина наименьшего периода решетки в направлении этой трансляции.

Что касается зеркально-поворотных осей, то их комбинирование с трансляциями не приводит к новым типам элементов симметрии. Действительно, всякий перенос в этом случае можно разложить на две части, из которых одна перпендикулярна к оси, а другая параллельна ей, т. е. перпендикулярна к плоскости отражения. Поэтому зеркально-поворотное преобразование с последующим переносом всегда эквивалентно такому же простому преобразованию вокруг другой зеркально-поворотной оси, параллельной первой.

## § 129. Решетка Бравэ

Трансляционные периоды решетки можно изображать векторами **a**, направленными вдоль соответствующего параллельного переноса и по величине равными длине переноса. Кристаллическая решетка обладает бесконечным множеством различных трансляционных периодов. Однако не все эти периоды независимы друг от друга. Всегда можно выбрать в качестве основных три (соответственно числу измерений пространства) периода, не лежащих в одной плоскости. Тогда всякий другой период можно будет представить в виде геометрической суммы трех векторов, из которых каждый является целым кратным одного из основных периодов. Если основные периоды обозначать посредством $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, то произвольный период $\mathbf{a}$ будет иметь вид

$$\mathbf{a} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3, \tag{129,1}$$

где $n_1$, $n_2$, $n_3$ — любые целые положительные или отрицательные числа, включая нуль.

Выбор основных периодов отнюдь не однозначен. Напротив, их можно выбрать бесчисленным множеством способов. Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — основные периоды; введем вместо них другие периоды $\mathbf{a}'_1$, $\mathbf{a}'_2$, $\mathbf{a}'_3$ согласно формулам

$$\mathbf{a}'_i = \sum_k \alpha_{ik}\mathbf{a}_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{129,2}$$

где $\alpha_{ik}$ — некоторые целые числа. Если новые периоды $\mathbf{a}'_i$ также являются основными, то, в частности, прежние периоды $\mathbf{a}_i$ должны выражаться через $\mathbf{a}'_i$ в виде линейных функций с целыми коэффициентами; тогда и всякий другой период решетки сможет быть выражен через $\mathbf{a}'_i$. Другими словами, если выразить из (129,2) $\mathbf{a}_i$ через $\mathbf{a}'_i$, то мы должны получить формулы типа $\mathbf{a}_i = \sum \beta_{ik}\mathbf{a}'_k$ опять с целыми $\beta_{ik}$. Но, как известно, определитель $|\beta_{ik}|$ равен обратной величине определителя $|\alpha_{ik}|$. Поскольку оба должны быть целыми, отсюда следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы $\mathbf{a}'_i$ были основными периодами, является равенство

$$|\alpha_{ik}| = \pm 1. \tag{129,3}$$

Выберем какой-нибудь из узлов решетки и отложим от него три основных периода. Построенный на этих трех векторах параллелепипед называется *элементарной ячейкой* решетки. Вся решетка может быть тогда представлена в виде совокупности таких правильно уложенных параллелепипедов. Все элементарные ячейки в точности одинаковы по своим свойствам; они имеют одинаковую форму и объем, и в каждой из них находится одинаковое число одинаково расположенных атомов каждого рода.

Во всех вершинах элементарных ячеек находятся, очевидно, одинаковые атомы. Все эти вершины представляют собой, другими словами, эквивалентные узлы, причем каждый из них может быть совмещен с любым другим посредством параллельного переноса на один из периодов решетки. Совокупность всех таких эквивалентных узлов, которые могут быть совмещены друг с другом путем параллельного переноса, образует так называемую *решетку Бравэ* кристалла. Очевидно, что решетка Бравэ не включает в себя всех вообще узлов кристаллической решетки. Больше того, она даже не включает в себя, вообще говоря, всех эквивалентных узлов, так как в решетке могут существовать такие эквивалентные узлы, которые совмещаются друг с другом только при преобразованиях, содержащих повороты или отражения.

Решетку Бравэ можно построить, выделив какой-нибудь из узлов кристаллической решетки и производя все возможные параллельные переносы. Выбрав в качестве исходного другой узел (не входящий в первую решетку Бравэ), мы получили бы решетку Бравэ, смещенную относительно первой. Поэтому ясно, что кристаллическая решетка представляет собой, вообще говоря, несколько решеток Бравэ, вдвинутых одна в другую; каждая из них соответствует определенному сорту и расположению атомов, причем все эти решетки, рассматриваемые как системы точек, т. е. чисто геометрически, совершенно тождественны.

Вернемся снова к элементарным ячейкам. Соответственно произвольности в выборе основных периодов неоднозначным является также и выбор элементарной ячейки. Элементарная ячейка может быть построена на любых основных периодах. Получающиеся таким образом ячейки обладают, конечно, различной формой; объем же всех их оказывается одинаковым. В этом проще всего убедиться следующим образом. Из предыдущего ясно, что каждая элементарная ячейка содержит по одному из узлов, принадлежащих к каждой из решеток Бравэ, которые можно построить в данном кристалле. Следовательно, число элементарных ячеек в данном объеме всегда равно числу атомов какого-либо определенного сорта и расположения, т. е. не зависит от выбора ячейки. Поэтому не зависит от выбора ячейки и объем каждой из них, равный общему объему, деленному на число ячеек.

## § 130. Кристаллические системы

Займемся теперь рассмотрением всех возможных типов симметрии решеток Бравэ.

Предварительно докажем общую теорему, касающуюся симметрии кристаллических решеток по отношению к поворотам. Выясним, какими осями симметрии может обладать решетка. Пусть $A$ (рис. 55) есть один из узлов решетки Бравэ, через который проходит (перпендикулярно к плоскости рисунка) ось симметрии. Если $B$ — другой узел, отстоящий от $A$ на один из трансляционных периодов, то через $B$ должна проходить другая такая же ось симметрии.

Произведем теперь поворот вокруг оси, проходящей через $A$ на угол $\varphi = 2\pi/n$ ($n$ — порядок оси). Тогда точка $B$ вместе с проходящей через нее осью займет положение $B'$. Аналогично поворот вокруг $B$ переводит точку $A$ в $A'$. По условиям построения