нового вектора). Но ввиду медленного (логарифмического) характера расходимости интеграла размеры пленки, при которых флуктуации остаются еще малыми, могут оказаться довольно большими[1]). В таких случаях пленка конечных размеров могла бы практически проявлять «твердо-кристаллические» свойства, и для нее можно было бы приближенно говорить о двумерной решетке. Мы увидим в следующем параграфе, что эти свойства двумерных систем еще усиливаются при понижении температуры.

§ 138. Корреляционная функция в двумерных системах

Выражение (137,11) определяет средний квадрат флуктуационного смещения в каждой заданной точке двумерной кристаллической системы. Более глубокое понимание свойств таких систем может быть достигнуто путем рассмотрения функции корреляции между флуктуациями в различных точках системы.

Прежде всего заметим, что при $T=0$ двумерная решетка вполне могла бы существовать при любых размерах: расходимость интеграла (137,11) связана именно с тепловыми ($T\neq 0$) флуктуациями; пусть $\rho_0(\mathbf{r})$—функция плотности этой системы при $T=0$[2]). Определим теперь корреляционную функцию флуктуаций плотности при конечных, но достаточно низких температурах (малых по сравнению с дебаевской). В этих условиях в решетке возбуждены лишь длинноволновые колебания; другими словами, изменение функции плотности определяется в основном длинноволновыми флуктуациями.

Пусть атомы в точках $\mathbf{r}$ решетки испытывают флуктуационные смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Если функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ мало меняется на расстояниях порядка постоянной решетки (что соответствует интересующим нас флуктуациям с малыми волновыми векторами), то изменение плотности в каждой точке пространства можно рассматривать как результат просто сдвига решетки на величину, равную местному значению вектора смещения. Другими словами, флуктуирующая плотность запишется как $\rho(\mathbf{r})=\rho_0[\mathbf{r}-\mathbf{u}(\mathbf{r})]$, а корреляция между ее флуктуациями в различных точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ определяется средним значением

$$\langle\rho(\mathbf{r}_1)\,\rho(\mathbf{r}_2)\rangle=\langle\rho_0[\mathbf{r}_1-\mathbf{u}(\mathbf{r}_1)]\,\rho_0[\mathbf{r}_2-\mathbf{u}(\mathbf{r}_2)]\rangle. \qquad (138,1)$$

Разложим периодическую функцию $\rho_0(\mathbf{r})$ в ряд Фурье (ср. (133,2)):

$$\rho_0(\mathbf{r})=\bar{\rho}+\sum_{\mathbf{b}\neq 0}\rho_{\mathbf{b}}e^{i\mathbf{b}\mathbf{r}}\ , \qquad (138,2)$$

[1]) То же самое относится к трехмерным телам с одномерной периодичностью, для которых интеграл (137,9) расходится логарифмически.

[2]) Здесь и ниже в этом параграфе $\mathbf{r}=(x,\ y)$—двумерный радиус-вектор в плоскости системы.

где $\mathbf{b}$ — векторы обратной решетки (плоской); из суммы выделен постоянный член $\bar{\rho}$. При подстановке этих рядов в (138,1) и усреднении члены с произведениями $\rho_{\mathbf{b}}\rho_{\mathbf{b}'}$ с $\mathbf{b}' \neq -\mathbf{b}$, как мы увидим ниже, выпадают. Произведение же с $\mathbf{b}' = -\mathbf{b}$ дает в (138,1) вклад

$$|\rho_{\mathbf{b}}|^2 \exp[i\,\mathbf{b}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\langle\exp[-i\,\mathbf{b}(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)]\rangle \tag{138,3}$$

(для краткости пишем $\mathbf{u}(\mathbf{r}_1)=\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_2)=\mathbf{u}_2$).

Распределение вероятностей для флуктуаций вектора смещения дается формулой (137,2) в которой $\Delta F_{\text{п}}$ — квадратичный функционал от $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Если рассматривать значения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в различных (дискретных) точках пространства как различные флуктуирующие величины x_a ($a = 1, 2, \ldots$), то это значит, что распределение вероятностей для них — гауссово. Тогда можно воспользоваться для усреднения в (138,3) формулой

$$\langle\exp(\alpha_a x_a)\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha_a\alpha_b\langle x_a x_b\rangle\right)$$

(см. задачу к § 111), что дает

$$\langle\exp[-i\,\mathbf{b}(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)]\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}b_i b_l \chi_{il}\right), \tag{138,4}$$

где

$$\chi_{il}(\mathbf{r}) = \langle(u_{i1}-u_{i2})(u_{l1}-u_{l2})\rangle = 2\langle u_i u_l\rangle - \langle u_{i1}u_{l2}\rangle - \langle u_{i2}u_{l1}\rangle$$

($\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$). Остается подставить сюда $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ в виде разложений (137,1). Заметив при этом, что средние значения $\langle u_{i\mathbf{k}}u_{l\mathbf{k}'}\rangle$ равны нулю при $\mathbf{k}' \neq -\mathbf{k}$, а при $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ даются выражениями (137,11), получим

$$\chi_{il}(\mathbf{r}) = T\int \frac{A_{il}(\mathbf{n})}{k^2}\,2(1-\cos\mathbf{kr})\frac{dk_x\,dk_y}{(2\pi)^2}. \tag{138,5}$$

Этот интеграл сходится при малых k, поскольку множитель $(1-\cos\mathbf{kr}) \propto k^2$ при $k \to 0$[1]). Со стороны же больших значений k интеграл логарифмически расходится. Эта расходимость связана в действительности лишь с неприменимостью использованных приближений при больших k: при $k \gtrsim k_{\max}$, $\hbar c k_{\max} \sim T$ (c — скорость звука; см. § 110) флуктуации перестают быть классическими (при низких температурах это условие нарушается раньше, чем условие $k \ll 1/a$, где a — постоянная решетки). Замечая также,

[1]) Проследив за происхождением этого множителя, заметим, что он возник в результате равенства $\mathbf{b}' = -\mathbf{b}$ в (138,3). Легко убедиться, что при $\mathbf{b}' \neq -\mathbf{b}$ сокращений в подынтегральном выражении не происходит и интеграл расходится. Поскольку эти интегралы входят в показатель экспоненты (ср. (138,4)), то их расходимость приводит к обращению в нуль соответствующих вкладов в корреляционную функцию.

что при больших k член с быстро осциллирующим множителем $\cos \mathbf{kr}$ в подынтегральном выражении может быть опущен, находим

$$\chi_{il}(\mathbf{r}) = \frac{T}{\pi} \overline{A}_{il} \ln (k_{\max} r) \qquad (138,6)$$

(черта над A_{il} означает усреднение по направлениям вектора $\mathbf{k}$ в плоскости).

Искомую корреляционную функцию мы получим теперь, подставив (138,6) в (138,3—4) и просуммировав по $\mathbf{b}$; асимптотический закон убывания этой функции с расстоянием r определяется наименее быстро убывающим членом суммы:

$$\langle \rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)\rangle - \overline{\rho}^2 \backsim \frac{1}{r^{T\alpha_{\mathbf{b}}}} \cos \mathbf{br}, \qquad \alpha_{\mathbf{b}} = \frac{1}{2\pi} b_i b_l \overline{A}_{il}, \qquad (138,7)$$

где в качестве $\mathbf{b}$ надо выбрать тот из основных периодов обратной решетки, для которого величина $\alpha_{\mathbf{b}}$ имеет наименьшее значение.

Таким образом, в двумерной решетке корреляционная функция хотя и стремится к нулю при $r \to \infty$ (в противоположность трехмерной решетке, где она стремится к конечному пределу), но лишь по степенному закону, причем тем более медленному, чем ниже температура[1]).

Аналогичные, хотя и несколько более громоздкие вычисления приводят к закону такого же типа и для корреляционной функции в трехмерной системе с функцией плотности $\rho(x)$.

Напомним для сравнения, что в обычной жидкости корреляционная функция убывает по гораздо более быстрому, экспоненциальному, закону (см. § 116).

§ 139. Симметрия по ориентации молекул

Условие $\rho = \mathrm{const}$ есть необходимое, но отнюдь не достаточное условие изотропности тела. Это ясно видно из следующего примера. Представим себе тело, состоящее из молекул удлиненной формы, причем все положения в пространстве молекулы как целого (ее центра инерции) равновероятны, но оси молекул ориентированы преимущественно в одну сторону. Ясно, что такое тело будет анизотропным, несмотря на то, что для каждого из входящих в состав молекулы атомов будет $\rho = \mathrm{const}$.

Свойство, о симметрии которого при этом идет речь, можно сформулировать как взаимную корреляцию между положениями

---

[1]) Корреляционная функция такого вида была найдена *Райсом* (*T. M. Rice*, 1965) для другого двумерного объекта (двумерного сверхпроводника), а для двумерной решетки — *В. Л. Березинским* (1971).