сталла оказывается периодической вдоль одного направления (ось x) в пространстве (так что корреляционная функция $\rho_{12} = \rho_{12}(x, \mathbf{r}_{12})$). Вектор $\mathbf{n}$ возвращается к прежнему значению через каждый интервал длины $2\pi/q_0$ вдоль оси x; но поскольку направления $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$ физически эквивалентны, истинный период повторяемости структуры равен π/q_0. Об описанной таким образом структуре обычно говорят как о *геликоидальной*.

Разумеется, изложенная теория справедлива, лишь если период геликоидальной структуры велик по сравнению с молекулярными размерами. Это условие фактически выполняется в холестерических жидких кристаллах (период $\pi/q_0 \sim 10^{-5}$ см).

§ 141. Флуктуации в жидких кристаллах

Рассмотрим флуктуации, испытываемые направлением директора $\mathbf{n}$ в нематическом жидком кристалле (*P. G. de Gennes*, 1968).

Представим $\mathbf{n}$ в виде $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \boldsymbol{\nu}$, где $\mathbf{n}_0 \equiv \bar{\mathbf{n}}$ — постоянное вдоль всего объема равновесное направление, а $\boldsymbol{\nu} \equiv \Delta\mathbf{n}$ — флуктуационное отклонение от этого значения. Поскольку $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}_0^2 = 1$, то $\mathbf{n}_0\boldsymbol{\nu} \approx 0$, т. е. вектор $\boldsymbol{\nu}$ перпендикулярен к $\mathbf{n}_0$. Соответственно этому корреляционная функция флуктуаций

$$\langle \nu_\alpha(\mathbf{r}_1)\, \nu_\beta(\mathbf{r}_2) \rangle \tag{141,1}$$

представляет собой двумерный тензор в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{n}_0$ (α, β — векторные индексы в этой плоскости). В однородной, но анизотропной жидкости эта функция зависит не только от величины, но и от направления вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Сильное влияние на флуктуации директора оказывает магнитное поле. Этот эффект связан с появлением в плотности свободной энергии жидкого кристалла дополнительного члена вида

$$F_{\text{магн}} = -\frac{\chi_a}{2}(\mathbf{nH})^2, \tag{141,2}$$

зависящего от самого вектора $\mathbf{n}$, а не от его производных, как в (140,2)[1]). Если $\chi_a > 0$, то равновесное направление $\mathbf{n}$ совпадает с направлением поля, а если $\chi_a < 0$, то оно лежит в плоскости, перпендикулярной к полю. Будем считать для определенности, что $\chi_a > 0$, так что $\mathbf{n}_0 \parallel \mathbf{H}$. Тогда $(\mathbf{nH})^2 \approx \mathbf{H}^2(1-\boldsymbol{\nu}^2)$; опустив не зависящий от $\boldsymbol{\nu}$ член, пишем:

$$F_{\text{магн}} = \frac{\chi_a}{2} H^2 \boldsymbol{\nu}^2. \tag{141,3}$$

---

[1]) В одноосной анизотропной среде магнитная восприимчивость представляет собой тензор вида $\chi_{ik} = \chi_0\delta_{ik} + \chi_a n_i n_k$, а намагниченность вещества привносит в его свободную энергию вклад $-\chi_{ik}H_iH_k/2$. Величина (141,2) есть зависящая от $\mathbf{n}$ часть этого вклада.

Взяв F из (140,2) и (141,3) и сохранив лишь величины второго порядка по $\mathbf{v}$, получим следующее выражение для изменения полной свободной энергии при флуктуации:

$$\Delta F_{\text{п}}=\frac{1}{2}\int\left\{a_1(\operatorname{div}\mathbf{v})^2+a_2(\operatorname{rot}_x\mathbf{v})^2+a_3\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right)^2+\chi_a H^2\mathbf{v}^2\right\}dV \qquad (141,4)$$

(ось x выбрана в направлении $\mathbf{n}_0$). Подчеркнем, что, используя выражение (140,2) для энергии деформированного кристалла, мы тем самым ограничиваемся рассмотрением флуктуаций с большими (по сравнению с молекулярными размерами) длинами волн.

Далее поступаем подобно тому, как это уже делалось в § 116. Представляем флуктуирующую величину $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в виде ряда Фурье в объеме V:

$$\mathbf{v}=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}},\qquad \mathbf{v}_{-\mathbf{k}}=\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{*}. \qquad (141,5)$$

После подстановки этого ряда выражение (141,4) разобьется на сумму членов $(\Delta F_{\text{п}})_{\mathbf{k}}$, каждый из которых зависит только от компоненты $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ с определенным значением $\mathbf{k}$. Выбрав плоскость xy так, чтобы она проходила через направление $\mathbf{k}$ (и $\mathbf{H}$), получим

$$(\Delta F_{\text{п}})_{\mathbf{k}}=\frac{V}{2}\left\{(a_1k_y^2+a_3k_x^2+\chi_aH^2)\,|\nu_{y\mathbf{k}}|^2+(a_2k_y^2+a_3k_x^2+\chi_aH^2)\,|\nu_{z\mathbf{k}}|^2\right\}.$$

Отсюда (ср. § 116) находим для средних квадратов флуктуаций

$$\begin{aligned}\langle|\nu_{y\mathbf{k}}|^2\rangle&=\frac{T}{V(a_1k_y^2+a_3k_x^2+\chi_aH^2)},\\ \langle|\nu_{z\mathbf{k}}|^2\rangle&=\frac{T}{V(a_2k_y^2+a_3k_x^2+\chi_aH^2)},\\ \langle\nu_{y\mathbf{k}}\nu_{z\mathbf{k}}\rangle&=0.\end{aligned} \qquad (141,6)$$

Мы видим, что в отсутствие поля флуктуации фурье-компонент $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ неограниченно возрастают при $\mathbf{k}\to 0$ (интегралы же по d^3k, определяющие средний квадрат самого вектора $\mathbf{v}$, остаются конечными). Наложение магнитного поля подавляет флуктуации с волновыми векторами $k\lesssim H(\chi_a/a)^{1/2}$ (где a — порядок величины коэффициентов a_1, a_2, a_3) [1]).

---

[1]) Такой характер флуктуаций аналогичен поведению флуктуаций плотности обычной жидкости вблизи ее критической точки, или флуктуаций параметра порядка вблизи точки фазового перехода второго рода (см. ниже §§ 146, 152). В то время, как в последних случаях роль подавляющего флуктуации фактора играет «расстояние» до указанных точек, здесь эту роль играет не зависящий от температуры фактор — внешнее магнитное поле. Отметим, что именно возрастание флуктуаций $\mathbf{n}$ при малых $\mathbf{k}$ позволяет рассматривать эти флуктуации независимо от флуктуаций других величин. В этой связи существенно,

Корреляционная функция (141,1) может быть вычислена из (141,6) по формуле

$$\langle \nu_\alpha(\mathbf{r}_1)\,\nu_\beta(\mathbf{r}_2)\rangle = \int e^{i\mathbf{kr}}\,\langle \nu_{\alpha\mathbf{k}}\nu^*_{\beta\mathbf{k}}\rangle \frac{V\,d^3k}{(2\pi)^3} \tag{141,7}$$

(ср. (116,13)). Мы не станем приводить довольно громоздкий результат интегрирования [1]). Укажем лишь, что в отсутствие поля корреляционная функция убывает с расстоянием $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ как $1/r$. При наличии же поля убывание становится экспоненциальным, с корреляционным радиусом $r_c \sim (a/\chi_a)^{1/2}H^{-1}$.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены флуктуации направления директора в холестерическом жидком кристалле, мы ограничимся лишь краткими замечаниями по этому поводу.

В холестерической среде можно различать флуктуации местного направления оси геликоидальной структуры и флуктуации фазы—угла поворота вектора $\mathbf{n}$ вокруг этой оси. Флуктуации первого из этих типов конечны. Средний же квадрат флуктуации фазы оказывается (в отсутствие магнитного поля) логарифмически расходящимся при $\mathbf{k} \to 0$. В этом отношении флуктуации в среде с одномерной периодичностью ориентационной структуры оказываются аналогичными флуктуациями в среде с одномерной периодичностью расположения частиц (§ 137). Строго говоря, такая периодичность оказывается тем самым невозможной в среде сколь угодно большого протяжения. Однако ввиду большой величины периода геликоидальной структуры в холестерических жидких кристаллах расходимость флуктуаций наступила бы лишь при столь огромных размерах, что весь вопрос становится чисто абстрактным.

Скажем несколько слов о флуктуациях в смектических жидких кристаллах, состоящих из правильно расположенных плоских слоев. Как уже было отмечено в § 139, такая структура размывается тепловыми флуктуациями и потому может осуществляться лишь в ограниченных объемах. Интересно, однако, что эти флуктуации подавляются магнитным полем. Поясним происхождение этого эффекта.

В каждом слое молекулы ориентированы упорядоченным образом с преимущественным направлением, задаваемым директо-

---

что мы не рассматриваем окрестность точек фазового перехода второго рода. Вблизи этих точек возрастают также флуктуации других величин, характеризующих переход, и флуктуации $\mathbf{n}$, вообще говоря, уже нельзя рассматривать независимо от других. Подчеркнем также, что возрастание флуктуаций не приводит к каким-либо ограничениям области применимости формулы (141,6), в то время как применимость, например, формулы (146,8) ограничена неравенством (146,15).

[1]) Для его проведения выражения (141,6) должны быть, конечно, переписаны в виде, не связанном с конкретным выбором координатных осей.

ром $\mathbf{n}$; пусть это направление нормально к поверхности слоя. При флуктуации происходит деформирование поверхности слоев и поворот директора; пусть $\mathbf{u}$ — вектор смещения точек слоя, а $\boldsymbol{\nu}$ — снова изменение директора ($\mathbf{n}=\mathbf{n}_0+\boldsymbol{\nu}$). При длинноволновых деформациях слой можно рассматривать как геометрическую поверхность, и тогда малые величины $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{u}$ связаны друг с другом соотношением $\boldsymbol{\nu}=-\operatorname{grad}(\mathbf{u}\mathbf{n}_0)$ (изменение направления нормали к поверхности); для их фурье-компонент имеем: $\boldsymbol{\nu}_\mathbf{k}=-i\boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{u}_\mathbf{k}\mathbf{n}_0)$, где $\boldsymbol{\varkappa}$ — составляющая $\mathbf{k}$ в плоскости слоя. При наличии магнитного поля изменение направления директора вносит в $\Delta F_\text{п}$ дополнительный вклад (141,3), пропорциональный $\boldsymbol{\nu}^2$. В свою очередь это приведет к тому, что в интеграле (137,9), определяющем средний квадрат флуктуационного смещения, в знаменателе подынтегрального выражения появится (наряду с членом $\sim\varkappa^4$) еще и член $\sim\varkappa^2$; в результате расходимость интеграла исчезнет.

Наконец, остановимся на вопросе о принципиальной возможности существования жидкокристаллических двумерных систем (пленок). В такой системе ориентация молекул задается директором $\mathbf{n}$, лежащим в плоскости пленки. Если рассмотреть его флуктуации (с волновыми векторами $\mathbf{k}$, лежащими в плоскости пленки), то для них получится выражение, аналогичное (141,6): при отсутствии поля $\langle\boldsymbol{\nu}_\mathbf{k}^2\rangle\propto 1/\varphi(k_x, k_y)$, где $\varphi(k_x, k_y)$ — квадратичная функция компонент вектора $\mathbf{k}$. Но для нахождения полной флуктуации $\langle\boldsymbol{\nu}^2\rangle$ это выражение должно быть теперь проинтегрировано по $d^2k\propto k\,dk$, и интеграл логарифмически расходится. Таким образом, тепловые флуктуации размывают жидкокристаллическую двумерную структуру. Как и в случае твердокристаллической двумерной структуры (§ 137), однако, логарифмический характер расходимости не исключает возможности существования такой структуры в участках конечного размера.