венная формулировка этого свойства, однако, требовала бы записи $\eta(t, h)$ не в виде (148,18), а в терминах функции переменной $h/t^{\beta\delta}$.

Аналогичные соображения можно применить и к корреляционной функции флуктуаций параметра порядка. Так, в отсутствие поля она зависит, помимо расстояния r, еще от параметра t. Вблизи точки перехода, однако, корреляционная функция $G(r;\ t)$ может быть представлена в виде

$$G(r;\ t) = \frac{1}{r^{d-2+\zeta}} g(rt^{\nu}), \tag{148,21}$$

т. е. с помощью функции всего одной переменной $x = rt^{\nu}$. При $x \to 0$ эта функция стремится к постоянному пределу (в соответствии с определением (148,7)), а при $x \to \infty$ экспоненциально затухает, причем корреляционный радиус в зависимости от температуры следует закону (148,6).

Задача

Найти закон изменения с температурой при $t \to 0$ для производной $\partial C_v/\partial T$, если C_p стремится к бесконечности согласно (148,4) с $\alpha > 0$.

Решение. С большей точностью, чем в (148,1—2), напишем при $t \to 0$

$$C_p = T_c \frac{dP_c}{dT}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + a,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{dP_c}{dT} + \frac{b}{T_c}\frac{dT_c}{dP},$$

где a, b — постоянные. Подставив эти выражения в (16,9), найдем

$$C_v \approx a - b - \frac{b^2}{C_p}.$$

Если C_p возрастает как $|t|^{-\alpha}$, то $\partial C_v/\partial T \sim |t|^{-(1-\alpha)}$. При $t = 0$ функция $C_v(t)$ имеет максимум в угловой точке с вертикальной касательной.

§ 149. Масштабная инвариантность

Соотношения (148,13—17) не связаны с какими-либо предположениями о характере флуктуационной картины вблизи точки перехода[1]. Дальнейшие заключения о критических индексах требуют уже определенных предположений на этот счет.

Заметим, что в теорию входят, вообще говоря, два характерных размера, определяющих пространственное распределение флуктуаций, — корреляционный радиус r_c и размер r_0 участка тела, в котором средняя квадратичная флуктуация пара-

[1] Естественно поэтому, что все эти соотношения удовлетворяются и в теории Ландау.

метра порядка сравнивается с его характерным равновесным значением[1]). Неравенство (146,14), обеспечивающее применимость теории Ландау, можно записать как $r_c \gg r_0$ (действительно, согласно (146,13) и (146,11) имеем в объеме $V \sim r_0^3$: $\langle(\Delta\eta)^2\rangle \sim T_c/gr_0$ и, приравняв это величине $\eta^2 \sim a|t|/b$, найдем $r_0 \sim T_c b/ga|t|$; сравнение с r_c (146,12) приводит к условию (146,15)). При $t \to 0$ r_0 растет быстрее, чем r_c, и на границе области Ландау они сравниваются. Основное предположение о флуктуационной области (определяемой неравенством, обратным (146,15)) состоит в том, что в ней вообще отсутствует какой-либо малый параметр в теории. В частности, должно оставаться везде $r_0 \sim r_c$, так что r_c оказывается единственным размером, характеризующим флуктуации. Это предположение называют гипотезой масштабной инвариантности (*L. Kadanoff*, 1966; *А. З. Паташинский*, *В. Л. Покровский*, 1966).

Для оценки флуктуаций в объеме $V \sim r_c^3$ можно пользоваться формулой (146,2)[2]). Подставив в условие

$$\frac{T_c \chi}{V} \sim \eta^2, \tag{149,1}$$

объем $V \sim r_c^d$ и выразив затем все величины χ, r_c, η через степени t согласно определениям критических индексов, получим равенство $\nu d - \gamma = 2\beta$ или, с учетом (148,13),

$$\nu d = 2 - \alpha. \tag{149,2}$$

Присоединив это соотношение к полученным в § 148, мы можем выразить все критические индексы уже всего через два независимых[3]).

Требование масштабной инвариантности позволяет получить единообразным образом все вообще соотношения между критическими индексами. Для этого прежде всего дадим более формальное определение этого требования.

Пусть масштаб всех пространственных расстояний меняется в одинаковое число раз: $\mathbf{r} \to \mathbf{r}/u$ с некоторым постоянным u. Тогда масштабная инвариантность состоит в утверждении, что можно так изменить масштабы измерения величин t, h, η, чтобы все соотношения теории остались неизменными. Другими словами, можно таким образом выбрать показатели Δ_t, Δ_h, Δ_η (так

[1]) Разумеется, речь идет о распределении лишь на расстояниях, больших по сравнению с атомными размерами.

[2]) Напомним, что в таком виде (т. е. выраженная через восприимчивость χ) эта формула имеет общий характер и не связана с предположениями теории Ландау (см. примечание на стр. 514).

[3]) В теории Ландау масштабной инвариантности нет (а потому несправедливо и равенство (149,2)).

называемые *масштабные размерности*) в преобразованиях

$$t \to tu^{\Delta_t}, \quad h \to hu^{\Delta_h}, \quad \eta \to \eta u^{\Delta_\eta} \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \to \mathbf{r}/u, \tag{149,3}$$

чтобы из всех соотношений множители u выпали.

Изменение пространственного масштаба должно, в частности, приводить к такому же изменению корреляционного радиуса флуктуаций ($r_c \to r_c/u$); тем самым будет обеспечена инвариантность асимптотического выражения корреляционной функции ($\sim \exp(-r/r_c)$). Согласно определениям (148,6) и (148,11) при $h=0$ корреляционный радиус $r_c = \mathrm{const}\, t^{-\nu}$, а при $t=0$ $r_c = \mathrm{const}\cdot h^{-\mu}$. Произведя преобразование (149,3) и потребовав, чтобы коэффициенты в этих выражениях остались неизменными, получим

$$\Delta_t = \frac{1}{\nu}, \quad \Delta_h = \frac{1}{\mu}. \tag{149,4}$$

Далее рассмотрим изменение термодинамического потенциала при бесконечно малом изменении поля h. Согласно (144,2) имеем

$$d\Phi = -V\eta\, dh$$

(при $t=\mathrm{const}$ и, как всегда, $P=\mathrm{const}$). При масштабном преобразовании объем $V \to V/u^d$; потребовав, чтобы выражение $d\Phi$ осталось прежним, т. е.

$$Vu^{-d}\cdot \eta u^{\Delta_\eta}\cdot dhu^{\Delta_h} = V\eta\, dh,$$

получим

$$\Delta_\eta = d - \Delta_h = d - \frac{1}{\mu}. \tag{149,5}$$

Таким образом, размерности Δ_t, Δ_h, Δ_η выражены через два критических индекса μ и ν. Требование масштабной инвариантности дальнейших соотношений приводит уже к выражению остальных критических индексов через эти два.

Потребуем инвариантности «уравнения состояния» системы, т. е. выражения параметра порядка через температуру и поле: $\eta = \eta(t, h)$. Это значит, что должно быть

$$\eta\left(tu^{\Delta_t}, hu^{\Delta_h}\right) = u^{\Delta_\eta}\eta(t, h).$$

Решение этого функционального уравнения имеет вид

$$\eta(t, h) = h^{\Delta_\eta/\Delta_h} f\left(\frac{t}{h^{\Delta_t/\Delta_h}}\right), \quad \eta(t, h) = h^{\mu d - 1} f\left(\frac{t}{h^{\mu/\nu}}\right). \tag{149,6}$$

Аналогичные соображения можно применить и к термодинамическому потенциалу $\Phi(t, h)$ (точнее — к его сингулярной части, которая и подразумевается ниже под Φ). Будучи аддитивной величиной, полный термодинамический потенциал тела пропорционален его объему. Поэтому требование его инвариантности при масштабном преобразовании записывается как

$$\frac{1}{u^d}\Phi\left(tu^{\Delta_t},\ hu^{\Delta_h}\right)=\frac{1}{u^d}\Phi\left(tu^{1/\nu},\ hu^{1/\mu}\right)=\Phi(t,\ h).$$

Отсюда

$$\Phi(t,\ h)=h^{d\mu}\varphi\left(\frac{t}{h^{\mu/\nu}}\right). \tag{149,7}$$

Функции f и φ в (149,6—7), конечно, связаны друг с другом, поскольку $-\partial\Phi/\partial h=\eta V$. Выражения (149,6—7) написаны здесь для $h>0$; ввиду симметрии эффективного гамильтониана по отношению к замене $h\to -h$, $\eta\to-\eta$, формулы для $h<0$ получаются из написанных этой же заменой[1]).

Произведем дальнейшие рассуждения на основании формулы (149,7). Как уже отмечалось в связи с (148,18), при заданном отличном от нуля h термодинамические функции не имеют особенности по t и потому должны быть разложимы по целым степеням этой переменной. Это значит, что при $h\neq 0$, $t\to 0$ функция $\varphi(x)$ в (149,7) разлагается в ряд по целым степеням малой переменной $x=t/h^{\mu/\nu}$. Первые члены этого разложения дают

$$\Phi(t,\ h)\backsim h^{\mu d}\left[1+c_1\frac{t}{h^{\mu/\nu}}+c_2\frac{t^2}{h^{2\mu/\nu}}+\ldots\right], \tag{149,8}$$

где c_1, c_2—постоянные коэффициенты. Потребовав теперь, чтобы параметр порядка и теплоемкость, вычисленные как

$$\eta=-\frac{1}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial h},\qquad C_p\approx -T_c\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}.$$

вели себя при $t\to 0$ по законам $\eta\backsim h^{1/\delta}$ и $C_p\backsim h^{-\varepsilon}$ (отвечающим случаю сильного поля), получим два соотношения между критическими индексами:

$$(\mu d-1)\,\delta=1,\quad \mu\left(\frac{2}{\nu}-d\right)=\varepsilon;$$

легко проверить, что они действительно следуют из уже известных нам соотношений, полученных ранее другим способом.

Пусть теперь t имеет отличное от нуля значение; тогда термодинамические величины не имеют особенности при прохожде-

---

[1]) Напомним, однако, лишний раз, что в эффективном гамильтониане η фигурирует как переменная, по которой производится континуальное интегрирование в статистическом интеграле. В термодинамических же формулах под η подразумевается равновесное значение параметра порядка, которое дается производной $\partial\Phi/\partial h$ (или $\partial\Omega/\partial h$) от термодинамического потенциала, определенного по статистическому интегралу. Симметрия эффективного гамильтониана приводит, конечно, к аналогичной симметрии в термодинамических соотношениях.

нии нулевого значения переменной h, и потому функция $\Phi(t, h)$ разложима по целым степеням h. Это значит, что при $h \to 0$, $t \neq 0$ разложение функции $\varphi(x)$ по малой переменной $1/x = h^{\mu/\nu}/t$ должно иметь вид

$$\varphi(x) \backsim x^{\nu d}[1 + c_1 x^{-\nu/\mu} + c_2 x^{-2\nu/\mu} + \ldots];$$

множитель $x^{\nu d}$ компенсирует нецелую степень $h^{d\mu}$, а переменная разложения $x^{-\nu/\mu} \backsim h$. Разложение, однако, различно при $t > 0$ и при $t < 0$. При $t > 0$ потенциал $\Phi(t, h)$ содержит только четные степени h, поскольку производная $-\partial\Phi/\partial h = V\eta$ должна быть (в симметричной фазе) нечетной функцией h:

$$\Phi \backsim t^{\nu d}\left[1 + c_2 \frac{h^2}{t^{2\nu/\mu}} + \ldots\right], \qquad t > 0,\ h \to 0. \tag{149,9}$$

При $h \to 0$ теплоемкость должна вести себя по закону $t^{-\alpha}$, а параметр порядка — по закону $\eta = \chi h \backsim h t^{-\gamma}$ (отвечающим случаю слабого поля); легко убедиться, что получающиеся отсюда соотношения тоже эквивалентны уже известным. Если же температура $t < 0$, то разложение $\Phi(t, h)$ при $h \to 0$ содержит все целые степени h:

$$\Phi \backsim (-t)^{\nu d}\left[1 + c_1 \frac{h}{(-t)^{\nu/\mu}} + c_2 \frac{h^2}{(-t)^{2\nu/\mu}} + \ldots\right], \quad t < 0,\ h \to 0 \tag{149,10}$$

(с другими, конечно, коэффициентами c_1, c_2)[1]). Легко проверить, что для параметра спонтанного (не зависящего от h) порядка получается требуемый закон $(-t)^\beta$.

О преобразовании корреляционного радиуса шла речь выше. Осталось рассмотреть корреляционную функцию флуктуаций параметра η при $t \to 0$ и потребовать масштабной инвариантности выражения

$$G(r) = \mathrm{const} \cdot r^{-(d-2+\zeta)} \quad (t = 0).$$

При этом следует считать, что флуктуирующие величины $\eta(\mathbf{r})$ в разных точках пространства преобразуются независимо таким же образом, как и среднее значение η[2]). Тогда корреляционная

---

[1]) Если (149,10) относится, скажем, к полям $h > 0$, то формула для $h < 0$ получается из нее заменой $h \to -h$. Напомним (см. § 144), что при $t < 0$ состояния в полях различного знака относятся к физически тождественным «фазам», отличающимся знаком параметра порядка (как спонтанного, так и индуцированного полем); при $h \to 0$ эти две фазы находятся в равновесии друг с другом.

[2]) При этом существенно, что речь идет о расстояниях r, хотя и малых по сравнению с корреляционным радиусом, но все же больших по сравнению с межатомными расстояниями.

функция преобразуется как $G \to G u^{2\Delta_\eta}$, и мы получим условие

$$d+2-\frac{2}{\mu}=\zeta. \tag{149,11}$$

И это равенство является следствием уже известных.

Остановимся в заключение на численных значениях критических показателей. Экспериментальные данные и результаты численных расчетов свидетельствуют о том, что (в трехмерном случае) индексы α и ζ довольно малы: $\alpha \sim 0{,}1$, $\zeta \sim 0{,}05$. В первой строке следующей ниже таблицы даны значения остальных индексов, получающиеся, если положить $\alpha=\zeta=0$ ($d=3$). Во второй строке приведены значения, получающиеся, если принять для α и ζ их оценку по упомянутому в § 147 методу Вильсона (для переходов, описывающихся эффективным гамильтонианом (147,6) с одним параметром порядка[1]):

α	β	γ	δ	ε	μ	ν	ζ
0	1/3	4/3	5	0	2/5	2/3	0
0,08	0,33	1,26	4,8	0,05	0,40	0,64	0,04

(149,12)

§ 150. Изолированные и критические точки непрерывного перехода

Разделяя фазы разной симметрии, кривая (на диаграмме P, T) фазовых переходов второго рода не может, конечно, просто окончиться в некоторой точке. Она может, однако, перейти в кривую фазовых переходов первого рода. Точку, в которой одна кривая переходит в другую, можно назвать *критической точкой переходов второго рода*; она в известном смысле аналогична обычной критической точке (точка K на рис. 66; на этом и следующих рисунках в этом параграфе сплошные и пунктирные линии изображают кривые точек фазовых переходов соответственно первого и второго родов)[2].

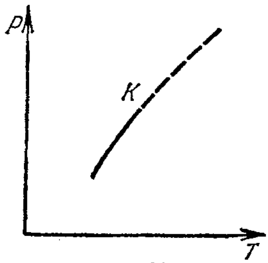

Рис. 66.

В рамках теории Ландау свойства вещества вблизи такой точки могут быть исследованы тем же развитым в § 143 методом разложения по степеням параметра порядка (*Л. Д. Ландау*, 1935).

В разложении (143,3) критическая точка определяется обращением в нуль обоих коэффициентов $A(P, T)$ и $B(P, T)$ (до тех

[1]) Упомянем, что, согласно оценке по этому методу, индекс α проходит через нуль при двухкомпонентном параметре порядка и становится отрицательным при большем числе компонент (для эффективных гамильтонианов, зависящих только от суммы квадратов $\eta^2=\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots$).

[2]) В литературе такую точку называют также *трикритической*.