функция преобразуется как $G \to G u^{2\Delta_\eta}$, и мы получим условие

$$d + 2 - \frac{2}{\mu} = \zeta. \tag{149,11}$$

И это равенство является следствием уже известных.

Остановимся в заключение на численных значениях критических показателей. Экспериментальные данные и результаты численных расчетов свидетельствуют о том, что (в трехмерном случае) индексы α и ζ довольно малы: $\alpha \sim 0{,}1$, $\zeta \sim 0{,}05$. В первой строке следующей ниже таблицы даны значения остальных индексов, получающиеся, если положить $\alpha = \zeta = 0$ $(d = 3)$. Во второй строке приведены значения, получающиеся, если принять для α и ζ их оценку по упомянутому в § 147 методу Вильсона (для переходов, описывающихся эффективным гамильтонианом (147,6) с одним параметром порядка [1])):

α	β	γ	δ	ε	μ	ν	ζ
0	1/3	4/3	5	0	2/5	2/3	0
0,08	0,33	1,26	4,8	0,05	0,40	0,64	0,04

(149,12)

§ 150. Изолированные и критические точки непрерывного перехода

Разделяя фазы разной симметрии, кривая (на диаграмме P, T) фазовых переходов второго рода не может, конечно, просто окончиться в некоторой точке. Она может, однако, перейти в кривую фазовых переходов первого рода. Точку, в которой одна кривая переходит в другую, можно назвать *критической точкой переходов второго рода*; она в известном смысле аналогична обычной критической точке (точка K на рис. 66; на этом и следующих рисунках в этом параграфе сплошные и пунктирные линии изображают кривые точек фазовых переходов соответственно первого и второго родов) [2]).

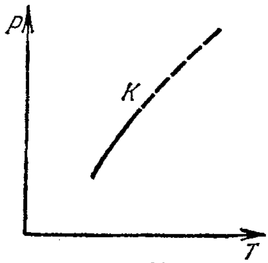

Рис. 66.

В рамках теории Ландау свойства вещества вблизи такой точки могут быть исследованы тем же развитым в § 143 методом разложения по степеням параметра порядка (*Л. Д. Ландау*, 1935).

В разложении (143,3) критическая точка определяется обращением в нуль обоих коэффициентов $A(P, T)$ и $B(P, T)$ (до тех

[1]) Упомянем, что, согласно оценке по этому методу, индекс α проходит через нуль при двухкомпонентном параметре порядка и становится отрицательным при большем числе компонент (для эффективных гамильтонианов, зависящих только от суммы квадратов $\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots$).

[2]) В литературе такую точку называют также *трикритической*.

пор, пока $A=0$, $B>0$, мы имеем дело с переходом второго рода, так что кривая этих переходов заканчивается лишь там, где B изменит знак). Для устойчивости состояния тела в самой критической точке необходимо тождественное исчезновение члена пятого порядка[1]) и положительность члена шестого порядка. Таким образом, исходим из разложения

$$\Phi(P,\ T,\ \eta)=\Phi_0(P,\ T)+A(P,\ T)\eta^2+B(P,\ T)\eta^4+D(P,\ T)\eta^6, \tag{150,1}$$

причем в критической точке $A_{\text{кр}}=0$, $B_{\text{кр}}=0$, $D_{\text{кр}}>0$.

В несимметричной фазе минимизация термодинамического потенциала дает

$$\eta^2=\frac{1}{3D}\left[-B+\sqrt{B^2-3AD}\right]. \tag{150,2}$$

Для энтропии $S=-\partial\Phi/\partial T$ этой фазы имеем, опуская члены высших степеней по η: $S=S_0-a\eta^2$, где $a=\partial A/\partial T$. Дифференцируя еще раз, находим теплоемкость

$$C_p=\frac{Ta^2}{2\sqrt{B^2-3AD}}, \tag{150,3}$$

где выписан лишь член, в котором знаменатель обращается в критической точке в нуль.

Введем температуру $T_0=T_0(P)$, для которой $B^2-3AD=0$; очевидно, что при $P=P_{\text{кр}}$, T_0 совпадает с $T_{\text{кр}}$. Первый член разложения B^2-3AD по степеням $T-T_0$:

$$B^2-3AD=-3a_0D_0(T-T_0). \tag{150,4}$$

Вблизи критической точки разность $T_c(P)-T_0(P)$ является малой величиной второго порядка; действительно, при $T=T_c(P)$ имеем $A=0$, и потому разность

$$T_c(P)-T_0(P)=-\frac{B^2}{3a_0D_0}, \tag{150,5}$$

т. е. стремится при $P\to P_{\text{кр}}$ к нулю как B^2.

Подставив (150,4) в (150,3), находим

$$C_p=\left(\frac{T^2a^3}{12D}\right)^{1/2}_{\text{кр}}\frac{1}{\sqrt{T_0-T}} \tag{150,6}$$

(с той же точностью коэффициент в этой формуле может быть взят при $T_{\text{кр}}$ вместо T_0). Таким образом, теплоемкость несимметричной фазы возрастает при приближении к критической точке как $(T_0-T)^{-1/2}$.

[1]) То есть невозможность составления инвариантов пятого порядка из параметров η_1, η_2, ...

Для состояний на самой кривой переходов второго рода имеем, полагая в (150,3) $A=0$ (или подставляя (150,5) в (150,6)) получим

$$C_p^{(II)} = \frac{T_{кр} a^2_{кр}}{2B}. \tag{150,7}$$

Обращаясь в нуль в критической точке, в ее окрестности величина B пропорциональна $T-T_{кр}$ (или $P-P_{кр}$).

Определим теперь теплоемкость несимметричной фазы на линии переходов первого рода, но снова вблизи критической точки. В точках этой линии находятся в равновесии друг с другом две различные фазы—симметричная и несимметричная. Значение параметра η во второй из них определяется условием равновесия $\Phi(\eta)=\Phi_0$, причем одновременно должно быть $\partial\Phi/\partial\eta=0$. Подстановка Φ из (150,1) приводит к уравнениям

$$A+B\eta^2+D\eta^4=0, \qquad A+2B\eta^2+3D\eta^4=0,$$

откуда

$$\eta^2 = -\frac{B}{2D}, \tag{150,8}$$

а подстановка этого значения снова в уравнение $\Phi(\eta)=\Phi_0$ дает

$$4AD=B^2. \tag{150,9}$$

Это—уравнение линии переходов первого рода.

Теплоемкость несимметричной фазы на этой линии получается просто подстановкой (150,9) в (150,3):

$$C_p^{(I)} = \frac{T^2_{кр} a^2_{кр}}{|B|}. \tag{150,10}$$

Сравнение с (150,7) показывает, что теплоемкость на линии переходов первого рода вдвое больше теплоемкости на линии переходов второго рода при том же расстоянии от критической точки. Теплота перехода из несимметричной в симметричную фазу:

$$q = T_{кр}(S_0-S) = \left(\frac{aT}{2D}\right)_{кр} |B|. \tag{150,11}$$

Покажем еще, что кривая переходов первого рода смыкается в критической точке с кривой переходов второго рода без излома. На первой кривой производная dT/dP определяется условием

$$2D\,dA+2A\,dD-B\,dB=0,$$

получающимся дифференцированием уравнения (150,9). Уравнение же кривой переходов второго рода: $A=0$, так что dT/dP определяется условием $dA=0$. Но в критической точке $A=0$,

$B=0$ и оба условия совпадают, так что dT/dP не имеет скачка. Аналогичным образом можно убедиться в том, что вторая производная d^2T/dP^2 испытывает скачок.

Мы знаем уже, что теория Ландау, на которой основаны изложенные здесь выводы, неприменима вблизи линии переходов второго рода. Интересно, однако, что условия применимости этой теории улучшаются по мере приближения к критической точке, что видно уже из неравенства (146,15), в правую часть которого входит как раз B. Разумеется, обращение B в нуль не означает, что флуктуационные поправки отсутствуют в критической точке вовсе. Оказывается, однако, что оно приводит к исчезновению главных вблизи линии перехода (степенных) поправок. Остающиеся поправки имеют логарифмический

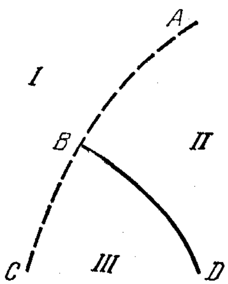

Рис. 67.

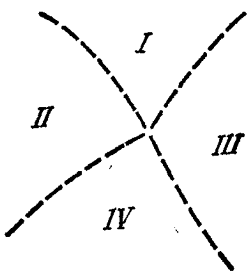

Рис. 68.

характер и приводят к тому, что результаты флуктуационной теории отличаются от результатов теории Ландау лишь степенями логарифма расстояния до критической точки. В частности, dT/dP в критической точке по-прежнему непрерывна.

Далее остановимся (снова в рамках теории Ландау) на некоторых свойствах точек пересечения линий фазовых переходов первого и второго рода.

Симметрия несимметричной фазы при фазовом переходе второго рода определяется (как было показано в § 145) минимизацией членов четвертого порядка в разложении Φ как функций коэффициентов $\gamma_i=\eta_i/\eta$. Но эти члены зависят также и от P и T, и поэтому может оказаться, что на разных участках линии переходов несимметричная фаза имеет различную симметрию. В простейшем случае такого рода мы имеем дело с пересечением линии переходов второго рода (кривая AC на рис. 67) с линией переходов первого рода (линия BD). Область I — симметричная фаза, а группы симметрии фаз II и III — подгруппы группы симметрии фазы I. Они, однако, вообще говоря, не являются подгруппами друг друга, и потому разделяющая эти фазы кривая BD—линия переходов первого рода. В точке B все три фазы тождественны[1]).

На рис. 68 показан возможный тип пересечения нескольких линий переходов второго рода. Если I—наиболее симметричная фаза, то группы симметрии фаз II и III являются подгруппами группы симметрии фазы I, группа же симметрии фазы IV—подгруппа одновременно групп симметрии фаз II и III[2]).

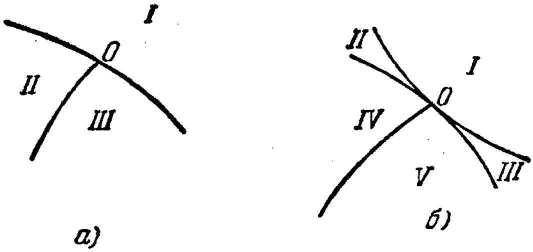

Рис. 69.

Наконец, осталось рассмотреть случай, когда члены третьего порядка в разложении термодинамического потенциала не обращаются в нуль тождественно. В этом случае условие существования точки непрерывного фазового перехода требует обращения в нуль наряду с коэффициентом $A(P, T)$ также и коэффициентов $B_\alpha(P, T)$ при инвариантах третьего порядка в разложении (145,6). Очевидно, что это возможно, только если имеется всего один инвариант третьего порядка; в противном случае мы получили бы более двух уравнений для двух неизвестных P и T. При наличии всего одного инварианта третьего порядка два уравнения $A(P, T)=0$ и $B(P, T)=0$ определяют соответствующие пары значений P, T, т. е. точки непрерывного фазового перехода являются изолированными.

Будучи изолированными, эти точки должны лежать определенным образом на пересечении кривых (в плоскости P, T) фазовых переходов первого рода. Имея в виду, что такие изолированные точки непрерывного перехода еще не наблюдались на опыте, мы не станем производить здесь подробное исследование, ограничившись лишь указанием результатов[3]).

Наиболее простой тип изображен на рис. 69, *а*. Фаза I обладает более высокой симметрией, а фазы II и III—более низ-

[1]) Флуктуационные поправки могут, вероятно, привести к возникновению в точке B особенности—угловой точки линии AB и CB.

[2]) Точку пересечения типа рис. 67 называют в литературе *бикритической*, а типа рис. 68—*тетракритической*.

[3]) См. *Л. Д. Ландау*, ЖЭТФ 7, 19 (1937) (Собрание трудов, том I, статья 28, «Наука», 1969).

кой; при этом симметрии фаз *II* и *III* одинаковы, и эти фазы отличаются лишь знаком η. В точке непрерывного перехода (*O* на рис. 69) все три фазы становятся тождественными.

В более сложных случаях в точке непрерывного перехода касаются две (как на рис. 69, *б*) или более кривых фазовых переходов первого рода. Фаза *I*—наиболее симметричная, остальные—менее симметричны, причем симметрии фаз *II* и *III* (и фаз *IV* и *V*) одинаковы, и эти фазы отличаются лишь знаком η.

§ 151. Фазовый переход второго рода в двумерной решетке

Невозможность теоретического определения критических индексов в общем виде придает особый интерес рассмотрению простой модели, допускающей точное аналитическое решение задачи о фазовом переходе второго рода. Это—определенная модель двумерной решетки, для которой задача о фазовом переходе была впервые решена *Онсагером* (*L. Onsager*, 1944)[1]).

Рассматриваемая модель представляет собой плоскую квадратную решетку, состоящую из N узлов, в каждом из которых находится «диполь» с осью, перпендикулярной к плоскости решетки. Диполь может иметь две противоположные ориентации, так что общее число возможных конфигураций диполей в решетке равно 2^N[2]). Для описания различных конфигураций поступим следующим образом. С каждым узлом решетки (с целочисленными координатами k, l) свяжем переменную σ_{kl}, принимающую два значения ± 1, соответствующие двум возможным ориентациям диполя. Если ограничиться только учетом взаимодействия между соседними диполями, то энергия конфигурации может быть записана в виде

$$E(\sigma) = -J \sum_{k,\, l=1}^{L} (\sigma_{kl}\sigma_{kl+1} + \sigma_{kl}\sigma_{k+1l}) \qquad (151,1)$$

(L—число узлов в ребре решетки, которую представляем себе в виде большого квадрата; $N = L^2$[3])). Параметр J определяет энергию взаимодействия пары соседних диполей, равную $-J$ и $+J$ соответственно для одинаковых и противоположных

[1]) Первоначальный метод, примененный Онсагером, был чрезвычайно сложен. В дальнейшем рядом авторов решение задачи было упрощено. Излагаемый ниже метод (частично использующий некоторые идеи метода *Каца* и *Уорда*, *J. C. Ward*, *M. Kac*, 1952) принадлежит *Н. В. Вдовиченко* (1964).

[2]) Эта модель известна в литературе как модель Изинга; фактически она была впервые введена *Ленцем* (*W. Lenz*, 1920), а для одномерного случая (в котором фазовый переход отсутствует) исследована *Изингом* (*E. Ising*, 1925).

[3]) Число L предполагается, разумеется, макроскопически большим, и везде в дальнейшем краевыми эффектами (связанными с особыми свойствами узлов вблизи краев решетки) пренебрегается.