ГЛАВА I

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 1. Уравнение непрерывности

Изучение движения жидкостей (и газов) представляет собой содержание *гидродинамики*. Поскольку явления, рассматриваемые в гидродинамике, имеют макроскопический характер, то в гидродинамике жидкость[1]) рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается все-таки настолько большим, что содержит еще очень большое число молекул. Соответственно этому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объема, то всегда при этом будет подразумеваться «физически» бесконечно малый объем, т. е. объем, достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения «жидкая частица», «точка жидкости». Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом идет речь не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Математическое описание состояния движущейся жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ и каких-либо ее двух термодинамических величин, например давления $p(x, y, z, t)$ и плотности $\rho(x, y, z, t)$. Как известно, все термодинамические величины определяются по значениям каких-либо двух из них с помощью уравнения состояния вещества; поэтому задание пяти величин: трех компонент скорости $\mathbf{v}$, давления p и плотности ρ, полностью определяет состояние движущейся жидкости.

Все эти величины являются, вообще говоря, функциями координат x, y, z и времени t. Подчеркнем, что $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ есть скорость жидкости в каждой данной точке x, y, z пространства

---

[1]) Мы говорим здесь и ниже для краткости только о жидкости, имея при этом в виду как жидкости, так и газы.

в момент времени t, т. е. относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам жидкости, передвигающимся со временем в пространстве; то же самое относится к величинам ρ, p.

Начнем вывод основных гидродинамических уравнений с вывода уравнения, выражающего собой закон сохранения вещества в гидродинамике.

Рассмотрим некоторый объем V_0 пространства. Количество (масса) жидкости в этом объеме есть $\int \rho\, dV$, где ρ есть плотность жидкости, а интегрирование производится по объему V_0. Через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, в единицу времени протекает количество $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ жидкости; вектор $d\mathbf{f}$ по абсолютной величине равен площади элемента поверхности и направлен по нормали к ней. Условимся направлять $d\mathbf{f}$ по внешней нормали. Тогда $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ положительно, если жидкость вытекает из объема, и отрицательно, если жидкость втекает в него. Полное количество жидкости, вытекающей в единицу времени из объема V_0, есть, следовательно,

$$\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f},$$

где интегрирование производится по всей замкнутой поверхности, охватывающей рассматриваемый объем.

С другой стороны, уменьшение количества жидкости в объеме V_0 можно написать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV.$$

Приравнивая оба выражения, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}. \qquad (1,1)$$

Интеграл по поверхности преобразуем в интеграл по объему:

$$\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \rho\mathbf{v}\, dV.$$

Таким образом,

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v}\right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место для любого объёма, то должно быть равным нулю подынтегральное выражение, т. е.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0. \tag{1,2}$$

Это — так называемое *уравнение непрерывности.*

Раскрыв выражение $\operatorname{div}\rho\mathbf{v}$, (1,2) можно написать также в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = 0. \tag{1,3}$$

Вектор

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \tag{1,4}$$

называют *плотностью потока жидкости.* Его направление совпадает с направлением движения жидкости, а абсолютная величина определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, расположенной перпендикулярно к скорости.

§ 2. Уравнение Эйлера

Выделим в жидкости некоторый объем. Полная сила, действующая на выделенный объем жидкости, равна интегралу

$$-\oint p\, d\mathbf{f},$$

взятому по поверхности рассматриваемого объема. Преобразуя его в интеграл по объему, имеем:

$$-\oint p\, d\mathbf{f} = -\int \operatorname{grad} p\, dV.$$

Отсюда видно, что на каждый элемент объема dV жидкости действует со стороны окружающей его жидкости сила $-dV \operatorname{grad} p$. Другими словами, можно сказать, что на единицу объема жидкости действует сила $-\operatorname{grad} p$.

Мы можем теперь написать уравнение движения элемента объема жидкости, приравняв силу $-\operatorname{grad} p$ произведению массы ρ единицы объема жидкости на ее ускорение $d\mathbf{v}/dt$:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p. \tag{2,1}$$

Стоящая здесь производная $d\mathbf{v}/dt$ определяет не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства, а изменение скорости определенной передвигающейся в про-