§ 3. Гидростатика

Для покоящейся жидкости, находящейся в однородном поле тяжести, уравнение Эйлера (2,4) принимает вид

$$\operatorname{grad} p = \rho \mathbf{g}. \tag{3,1}$$

Это уравнение описывает механическое равновесие жидкости. (Если внешние силы вообще отсутствуют, то уравнение равновесия гласит просто $\nabla p = 0$, т. е. $p = \text{const}$, — давление одинаково во всех точках жидкости.)

Уравнение (3,1) непосредственно интегрируется, если плотность жидкости можно считать постоянной во всем ее объеме, т. е. если не происходит заметного сжатия жидкости под действием внешнего поля. Направляя ось z вертикально вверх, имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Отсюда

$$p = -\rho g z + \text{const}.$$

Если покоящаяся жидкость имеет свободную поверхность (на высоте h), к которой приложено одинаковое во всех точках внешнее давление p_0, то эта поверхность должна быть горизонтальной плоскостью $z = h$. Из условия $p = p_0$ при $z = h$ имеем

$$\text{const} = p_0 + \rho g h,$$

так что

$$p = p_0 + \rho g (h - z). \tag{3,2}$$

Для больших масс жидкости или газа плотность ρ нельзя, вообще говоря, считать постоянной; это в особенности относится к газам (например, к воздуху). Предположим, что жидкость находится не только в механическом, но и в тепловом равновесии. Тогда температура одинакова во всех точках жидкости, и уравнение (3,1) может быть проинтегрировано следующим образом. Воспользуемся известным термодинамическим соотношением

$$d\Phi = -s\,dT + V\,dp,$$

где Φ — термодинамический потенциал, отнесенный к единице массы жидкости. При постоянной температуре

$$d\Phi = V\,dp = \frac{1}{\rho}\,dp.$$

Отсюда видно, что выражение $\frac{1}{\rho}\nabla p$ можно написать в рассматриваемом случае как $\nabla\Phi$, так что уравнение равновесия (3,1) принимает вид

$$\nabla\Phi = \mathbf{g}.$$

Для постоянного вектора $\mathbf{g}$, направленного вдоль оси z (в отрицательном ее направлении), имеет место тождество

$$\mathbf{g} = -\nabla(gz).$$

Таким образом,

$$\nabla(\Phi + gz) = 0,$$

откуда находим, что вдоль всего объема жидкости должна быть постоянной сумма

$$\Phi + gz = \mathrm{const}; \tag{3,3}$$

gz представляет собой потенциальную энергию единицы массы жидкости в поле тяжести. Условие (3,3) известно уже из статистической физики как условие термодинамического равновесия системы, находящейся во внешнем поле.

Отметим здесь еще следующее простое следствие из уравнения (3.1). Если жидкость или газ (например, воздух) находятся в механическом равновесии в поле тяжести, то давление в них может быть функцией только от высоты z (если бы на данной высоте давление было различно в различных местах, то возникло бы движение). Тогда из (3,1) следует, что и плотность

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{3,4}$$

тоже является функцией только от z. Но давление и плотность однозначно определяют температуру в данной точке тела. Следовательно, и температура должна быть функцией только от z. Таким образом, при механическом равновесии в поле тяжести распределение давления, плотности и температуры зависит только от высоты. Если же, например, температура различна в разных местах жидкости на одной и той же высоте, то механическое равновесие в ней невозможно.

Наконец, выведем уравнение равновесия очень большой массы жидкости, части которой удерживаются вместе силами гравитационного притяжения (звезда). Пусть φ — ньютоновский гравитационный потенциал создаваемого жидкостью поля. Он удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho, \tag{3,5}$$

где G — гравитационная постоянная. Напряженность гравитационного поля равна $-\operatorname{grad}\varphi$, так что сила, действующая на массу ρ, есть $-\rho\,\mathrm{grad}\,\varphi$. Поэтому условие равновесия будет

$$\mathrm{grad}\,p = -\rho\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Разделив это равенство на ρ, применив к обеим его сторонам операцию div и воспользовавшись уравнением (3,5), получим окончательное уравнение равновесия в виде

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p\right) = -4\pi G\rho. \tag{3,6}$$

Подчеркнем, что здесь идет речь только о механическом равновесии; существование же полного теплового равновесия в уравнении (3,6) отнюдь не предполагается.

Если тело не вращается, то в равновесии оно будет иметь сферическую форму, а распределение плотности и давления в нем будет центрально-симметричным. Уравнение (3,6), написанное в сферических координатах, примет при этом вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho. \tag{3,7}$$

§ 4. Условие отсутствия конвекции

Жидкость может находиться в механическом равновесии (т. е. в ней может отсутствовать макроскопическое движение), не находясь при этом в тепловом равновесии. Уравнение (3,1), являющееся условием механического равновесия, может быть удовлетворено и при непостоянной температуре в жидкости. При этом, однако, возникает вопрос о том, будет ли такое равновесие устойчивым. Оказывается, что равновесие будет устойчивым лишь при выполнении определенного условия. Если это условие не выполняется, то равновесие неустойчиво, что приводит к появлению в жидкости беспорядочных течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Такое движение носит название *конвекции*. Условие устойчивости механического равновесия является, другими словами, условием отсутствия конвекции. Оно может быть выведено следующим образом.

Рассмотрим элемент жидкости, находящийся на высоте z и обладающий удельным объемом $V(p, s)$, где p и s — равновесные давление и энтропия на этой высоте. Предположим, что этот элемент жидкости подвергается адиабатическому смещению на малый отрезок ξ вверх; его удельный объем станет при этом равным $V(p', s)$, где p' — давление на высоте $z+\xi$. Для устойчивости равновесия необходимо (хотя, вообще говоря, и не достаточно), чтобы возникающая при этом сила стремилась вернуть элемент в исходное положение. Это значит, что рассматри-