на массу ρ, есть $-\rho\,\mathrm{grad}\,\varphi$. Поэтому условие равновесия будет

$$\mathrm{grad}\,p = -\rho\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Разделив это равенство на ρ, применив к обеим его сторонам операцию div и воспользовавшись уравнением (3,5), получим окончательное уравнение равновесия в виде

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p\right) = -4\pi G\rho. \tag{3,6}$$

Подчеркнем, что здесь идет речь только о механическом равновесии; существование же полного теплового равновесия в уравнении (3,6) отнюдь не предполагается.

Если тело не вращается, то в равновесии оно будет иметь сферическую форму, а распределение плотности и давления в нем будет центрально-симметричным. Уравнение (3,6), написанное в сферических координатах, примет при этом вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho. \tag{3,7}$$

§ 4. Условие отсутствия конвекции

Жидкость может находиться в механическом равновесии (т. е. в ней может отсутствовать макроскопическое движение), не находясь при этом в тепловом равновесии. Уравнение (3,1), являющееся условием механического равновесия, может быть удовлетворено и при непостоянной температуре в жидкости. При этом, однако, возникает вопрос о том, будет ли такое равновесие устойчивым. Оказывается, что равновесие будет устойчивым лишь при выполнении определенного условия. Если это условие не выполняется, то равновесие неустойчиво, что приводит к появлению в жидкости беспорядочных течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Такое движение носит название *конвекции*. Условие устойчивости механического равновесия является, другими словами, условием отсутствия конвекции. Оно может быть выведено следующим образом.

Рассмотрим элемент жидкости, находящийся на высоте z и обладающий удельным объемом $V(p, s)$, где p и s — равновесные давление и энтропия на этой высоте. Предположим, что этот элемент жидкости подвергается адиабатическому смещению на малый отрезок ξ вверх; его удельный объем станет при этом равным $V(p', s)$, где p' — давление на высоте $z+\xi$. Для устойчивости равновесия необходимо (хотя, вообще говоря, и не достаточно), чтобы возникающая при этом сила стремилась вернуть элемент в исходное положение. Это значит, что рассматриваемый элемент должен оказаться более тяжелым, чем «вытесненная» им в новом положении жидкость. Удельный объем последней есть $V(p', s')$, где s' — равновесная энтропия жидкости на высоте $z+\xi$. Таким образом, имеем условие устойчивости

$$V(p', s') - V(p', s) > 0.$$

Разлагая эту разность по степеням

$$s' - s = \frac{ds}{dz}\xi,$$

получим:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \qquad (4,1)$$

Согласно термодинамическим формулам имеем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Теплоемкость c_p, как и температура T, есть величина всегда положительная; поэтому мы можем переписать (4,1) в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \qquad (4,2)$$

Большинство веществ расширяется при нагревании, т. е. $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p > 0$; тогда условие отсутствия конвекции сводится к неравенству

$$\frac{ds}{dz} > 0, \qquad (4,3)$$

т. е. энтропия должна возрастать с высотой.

Отсюда легко найти условие, которому должен удовлетворять градиент температуры $\frac{dT}{dz}$. Раскрыв производную $\frac{ds}{dz}$, пишем:

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0.$$

Наконец, подставив согласно (3,4)

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V},$$

получим:

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g\beta T}{c_p}, \qquad (4,4)$$

где $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — температурный коэффициент расширения. Если речь идет о равновесии столба газа, который можно считать идеальным (в термодинамическом смысле слова), то $\beta T = 1$ и условие (4,4) принимает вид

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}. \tag{4,5}$$

Конвекция наступает при нарушении этих условий, т. е. если температура падает по направлению снизу вверх, причем ее градиент превышает по абсолютной величине указанное в (4,4—5) значение [1]).

§ 5. Уравнение Бернулли

Уравнения гидродинамики заметно упрощаются в случае стационарного течения жидкости. Под *стационарным* (или *установившимся*) подразумевают такое течение, при котором в каждой точке пространства, занятого жидкостью, скорость течения остается постоянной во времени. Другими словами, $\mathbf{v}$ является функцией одних только координат, так что $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$. Уравнение (2,10) сводится теперь к равенству

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] = -\operatorname{grad} w. \tag{5,1}$$

Введем понятие о *линиях тока* как линиях, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точке касания в данный момент времени; они определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \tag{5,2}$$

При стационарном движении жидкости линии тока остаются неизменными во времени и совпадают с траекториями частиц жидкости. При нестационарном течении такое совпадение, разумеется, не имеет места: касательные к линии тока дают направления скорости разных частиц жидкости в последовательных точках пространства в определенный момент времени, в то время как касательные к траектории дают направления скорости определенных частиц в последовательные моменты времени.

Умножим уравнение (5,1) на единичный вектор касательной к линии тока в каждой ее точке; этот единичный вектор обозначим $\mathbf{l}$. Проекция градиента на некоторое направление равна, как известно, производной, взятой по этому направлению. По-

[1]) Для воды при 20 °С значение в правой части (4,4) составляет около 1° на 6,7 км; для воздуха значение в правой части (4,5) составляет около 1° на 100 метров.