где $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — температурный коэффициент расширения. Если речь идет о равновесии столба газа, который можно считать идеальным (в термодинамическом смысле слова), то $\beta T = 1$ и условие (4,4) принимает вид

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}. \tag{4,5}$$

Конвекция наступает при нарушении этих условий, т. е. если температура падает по направлению снизу вверх, причем ее градиент превышает по абсолютной величине указанное в (4,4—5) значение[1]).

§ 5. Уравнение Бернулли

Уравнения гидродинамики заметно упрощаются в случае стационарного течения жидкости. Под *стационарным* (или *установившимся*) подразумевают такое течение, при котором в каждой точке пространства, занятого жидкостью, скорость течения остается постоянной во времени. Другими словами, $\mathbf{v}$ является функцией одних только координат, так что $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$. Уравнение (2,10) сводится теперь к равенству

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - [\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}] = -\operatorname{grad} w. \tag{5,1}$$

Введем понятие о *линиях тока* как линиях, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точке касания в данный момент времени; они определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \tag{5,2}$$

При стационарном движении жидкости линии тока остаются неизменными во времени и совпадают с траекториями частиц жидкости. При нестационарном течении такое совпадение, разумеется, не имеет места: касательные к линии тока дают направления скорости разных частиц жидкости в последовательных точках пространства в определенный момент времени, в то время как касательные к траектории дают направления скорости определенных частиц в последовательные моменты времени.

Умножим уравнение (5,1) на единичный вектор касательной к линии тока в каждой ее точке; этот единичный вектор обозначим $\mathbf{l}$. Проекция градиента на некоторое направление равна, как известно, производной, взятой по этому направлению. По-

[1]) Для воды при 20 °C значение в правой части (4,4) составляет около 1° на 6,7 км; для воздуха значение в правой части (4,5) составляет около 1° на 100 метров.

этому искомая проекция от $\operatorname{grad} w$ есть $\partial w/\partial l$. Что касается вектора $[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}]$, то он перпендикулярен к скорости $\mathbf{v}$, и потому его проекция на направление $\mathbf{l}$ равна нулю.

Таким образом, из уравнения (5,1) мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = 0.$$

Отсюда следует, что величина $\frac{v^2}{2} + w$ постоянна вдоль линии тока:

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const}. \tag{5,3}$$

Значение const, вообще говоря, различно для разных линий тока. Уравнение (5,3) называют *уравнением Бернулли*[1]).

Если течение жидкости происходит в поле тяжести, то к правой части уравнения (5,1) надо прибавить еще ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$. Выберем направление силы тяжести в качестве направления оси z, причем положительные значения z отсчитываются вверх. Тогда косинус угла между направлениями $\mathbf{g}$ и $\mathbf{l}$ равен производной $-dz/dl$, так что проекция $\mathbf{g}$ на $\mathbf{l}$ есть

$$-g\frac{dz}{dl}.$$

Соответственно этому будем иметь теперь

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w + gz\right) = 0.$$

Таким образом, уравнение Бернулли гласит, что вдоль линий тока остается постоянной сумма

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const}. \tag{5,4}$$

§ 6. Поток энергии

Выберем какой-нибудь неподвижный в пространстве элемент объема и определим, как меняется со временем энергия находящейся в этом объеме жидкости. Энергия единицы объема жидкости равна

$$\rho\frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon,$$

где первый член есть кинетическая энергия, а второй — внутренняя энергия (ε — внутренняя энергия единицы массы жидкости).

---

[1]) Оно было установлено для несжимаемой жидкости (см. § 10) *Д. Бернулли* в 1738 г.