этому искомая проекция от $\operatorname{grad} w$ есть $\partial w/\partial l$. Что касается вектора $[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}]$, то он перпендикулярен к скорости $\mathbf{v}$, и потому его проекция на направление $\mathbf{l}$ равна нулю.

Таким образом, из уравнения (5,1) мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = 0.$$

Отсюда следует, что величина $\frac{v^2}{2} + w$ постоянна вдоль линии тока:

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const}. \tag{5,3}$$

Значение const, вообще говоря, различно для разных линий тока. Уравнение (5,3) называют *уравнением Бернулли*[1]).

Если течение жидкости происходит в поле тяжести, то к правой части уравнения (5,1) надо прибавить еще ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$. Выберем направление силы тяжести в качестве направления оси z, причем положительные значения z отсчитываются вверх. Тогда косинус угла между направлениями $\mathbf{g}$ и $\mathbf{l}$ равен производной $-dz/dl$, так что проекция $\mathbf{g}$ на $\mathbf{l}$ есть

$$-g\frac{dz}{dl}.$$

Соответственно этому будем иметь теперь

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w + gz\right) = 0.$$

Таким образом, уравнение Бернулли гласит, что вдоль линий тока остается постоянной сумма

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const}. \tag{5,4}$$

§ 6. Поток энергии

Выберем какой-нибудь неподвижный в пространстве элемент объема и определим, как меняется со временем энергия находящейся в этом объеме жидкости. Энергия единицы объема жидкости равна

$$\rho\frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon,$$

где первый член есть кинетическая энергия, а второй — внутренняя энергия (ε — внутренняя энергия единицы массы жидкости),

---

[1]) Оно было установлено для несжимаемой жидкости (см. § 10) *Д. Бернулли* в 1738 г.

Изменение этой энергии определяется частной производной

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right).$$

Для вычисления этой величины пишем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2}=\frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

или, воспользовавшись уравнением непрерывности (1,2) и уравнением движения (2,3),

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2}=-\frac{v^2}{2}\operatorname{div}\rho\mathbf{v}-\mathbf{v}\operatorname{grad}p-\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}.$$

В последнем члене заменяем $\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}={}^1/_2\mathbf{v}\nabla v^2$, а градиент давления согласно термодинамическому соотношению $dw=T\,ds+dp/\rho$ заменяем на $\rho\nabla w-\rho T\nabla s$ и получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2}=-\frac{v^2}{2}\operatorname{div}\rho\mathbf{v}-\rho\mathbf{v}\nabla\left(w+\frac{v^2}{2}\right)+\rho T\mathbf{v}\nabla s.$$

Для преобразования производной от $\rho\varepsilon$ воспользуемся термодинамическим соотношением

$$d\varepsilon=T\,ds-p\,dV=T\,ds+\frac{p}{\rho^2}\,d\rho.$$

Имея в виду, что сумма $\varepsilon+p/\rho=\varepsilon+pV$ есть не что иное, как тепловая функция w единицы массы, находим:

$$d(\rho\varepsilon)=\varepsilon\,d\rho+\rho\,d\varepsilon=w\,d\rho+\rho T\,ds,$$

и потому

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}=w\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho T\frac{\partial s}{\partial t}=-w\operatorname{div}\rho\mathbf{v}-\rho T\mathbf{v}\nabla s.$$

Здесь мы воспользовались также общим уравнением адиабатичности (2,6).

Собирая полученные выражения, находим для искомого изменения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\left(w+\frac{v^2}{2}\right)\operatorname{div}\rho\mathbf{v}-\rho(\mathbf{v}\nabla)\left(w+\frac{v^2}{2}\right),$$

или окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right\}. \qquad (6,1)$$

Для того чтобы выяснить смысл полученного равенства, проинтегрируем его по некоторому объему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dV=-\int\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right\}dV,$$

или, преобразовав стоящий справа объемный интеграл в интеграл по поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dV=-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)d\mathbf{f}. \qquad (6,2)$$

Слева стоит изменение в единицу времени энергии жидкости в некотором заданном объеме пространства. Стоящий справа интеграл по поверхности представляет собой, следовательно, количество энергии, вытекающей в единицу времени из рассматриваемого объема. Отсюда видно, что выражение

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right) \qquad (6,3)$$

представляет собой вектор *плотности потока энергии*. Его абсолютная величина есть количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению скорости.

Выражение (6,3) показывает, что каждая единица массы жидкости как бы переносит с собой при своем движении энергию $w+v^2/2$. Тот факт, что здесь стоит тепловая функция w, а не просто внутренняя энергия ε, имеет простой физический смысл. Подставив $w=\varepsilon+p/\rho$, напишем полный поток энергии через замкнутую поверхность в виде

$$-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)d\mathbf{f}-\oint p\mathbf{v}\,d\mathbf{f}.$$

Первый член есть энергия (кинетическая и внутренняя), непосредственно переносимая (в единицу времени) проходящей через поверхность массой жидкости. Второй же член представляет собой работу, производимую силами давления над жидкостью, заключенной внутри поверхности.

§ 7. Поток импульса

Произведем теперь аналогичный вывод для импульса жидкости. Импульс единицы объема жидкости есть $\rho\mathbf{v}$. Определим скорость его изменения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v}.$$

Будем производить вычисления в тензорных обозначениях. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t}v_i.$$

Воспользуемся уравнением непрерывности (1,2), написав его в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$