или, преобразовав стоящий справа объемный интеграл в интеграл по поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dV=-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)d\mathbf{f}. \tag{6,2}$$

Слева стоит изменение в единицу времени энергии жидкости в некотором заданном объеме пространства. Стоящий справа интеграл по поверхности представляет собой, следовательно, количество энергии, вытекающей в единицу времени из рассматриваемого объема. Отсюда видно, что выражение

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right) \tag{6,3}$$

представляет собой вектор *плотности потока энергии*. Его абсолютная величина есть количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению скорости.

Выражение (6,3) показывает, что каждая единица массы жидкости как бы переносит с собой при своем движении энергию $w+v^2/2$. Тот факт, что здесь стоит тепловая функция w, а не просто внутренняя энергия ε, имеет простой физический смысл. Подставив $w=\varepsilon+p/\rho$, напишем полный поток энергии через замкнутую поверхность в виде

$$-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)d\mathbf{f}-\oint p\mathbf{v}\,d\mathbf{f}.$$

Первый член есть энергия (кинетическая и внутренняя), непосредственно переносимая (в единицу времени) проходящей через поверхность массой жидкости. Второй же член представляет собой работу, производимую силами давления над жидкостью, заключенной внутри поверхности.

§ 7. Поток импульса

Произведем теперь аналогичный вывод для импульса жидкости. Импульс единицы объема жидкости есть $\rho\mathbf{v}$. Определим скорость его изменения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v}.$$

Будем производить вычисления в тензорных обозначениях. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t}v_i.$$

Воспользуемся уравнением непрерывности (1,2), написав его в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

и уравнением Эйлера (2,3) в форме

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_i v_k.$$

Первый член справа напишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

и находим окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{7,1}$$

где тензор Π_{ik} определяется как

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \tag{7,2}$$

Он, очевидно, симметричен.

Для выяснения смысла тензора Π_{ik} проинтегрируем уравнение (7,1) по некоторому объему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, dV = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV.$$

Стоящий в правой стороне равенства интеграл преобразуем в интеграл по поверхности[1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, dV = -\oint \Pi_{ik}\, df_k. \tag{7,3}$$

Слева стоит изменение в единицу времени i-й компоненты импульса в рассматриваемом объеме. Поэтому стоящий справа интеграл по поверхности есть количество этого импульса, вытекающего в единицу времени через ограничивающую объем поверхность. Следовательно, $\Pi_{ik}\, df_k$ есть i-я компонента импульса, протекающего через элемент df поверхности. Если написать df_k в виде $n_k df$ (df — абсолютная величина элемента поверхности, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к нему), то мы найдем,

[1]) Правило преобразования интеграла по замкнутой поверхности в интеграл по охватываемому этой поверхностью объему можно сформулировать следующим образом: оно осуществляется заменой элемента поверхности df_i оператором $dV \frac{\partial}{\partial x_i}$, который должен быть применен ко всему подынтегральному выражению

$$df_i \to dV \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

что $\Pi_{ik}n_k$ есть поток i-й компоненты импульса, отнесенный к единице площади поверхности. Заметим, что согласно (7,2) $\Pi_{ik}n_k = pn_i + \rho v_i v_k n_k$; это выражение может быть написано в векторном виде как

$$p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{n}). \qquad (7,4)$$

Таким образом, Π_{ik} есть i-я компонента количества импульса, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Тензор Π_{ik} называют *тензором плотности потока импульса*. Поток энергии, являющейся скалярной величиной, определяется вектором; поток же импульса, который сам есть вектор, определяется тензором второго ранга.

Вектор (7,4) определяет поток вектора импульса в направлении $\mathbf{n}$, т. е. через поверхность, перпендикулярную к $\mathbf{n}$. В частности, выбирая направление единичного вектора $\mathbf{n}$ вдоль направления скорости жидкости, мы найдем, что в этом направлении переносится лишь продольная компонента импульса, причем плотность ее потока равна

$$p + \rho v^2.$$

В направлении же, перпендикулярном к скорости, переносится лишь поперечная (по отношению к $\mathbf{v}$) компонента импульса, а плотность ее потока равна просто p.

§ 8. Сохранение циркуляции скорости

Интеграл

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l},$$

взятый вдоль замкнутого контура, называют *циркуляцией скорости* вдоль этого контура.

Рассмотрим замкнутый контур, проведенный в жидкости в некоторый момент времени. Будем рассматривать его как «жидкий», т. е. как составленный из находящихся на нем частиц жидкости. С течением времени эти частицы передвигаются, а с ними перемещается и весь контур. Выясним, что происходит при этом с циркуляцией скорости вдоль контура. Другими словами, вычислим производную по времени

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l}.$$

Мы пишем здесь полную производную по времени соответственно тому, что ищем изменение циркуляции вдоль перемещающегося жидкого контура, а не вдоль контура, неподвижного в пространстве.

Во избежание путаницы будем временно обозначать дифференцирование по координатам знаком δ, оставив знак d для