что $\Pi_{ik}n_k$ есть поток i-й компоненты импульса, отнесенный к единице площади поверхности. Заметим, что согласно (7,2) $\Pi_{ik}n_k = pn_i + \rho v_i v_k n_k$; это выражение может быть написано в векторном виде как

$$p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{vn}). \tag{7,4}$$

Таким образом, Π_{ik} есть i-я компонента количества импульса, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Тензор Π_{ik} называют *тензором плотности потока импульса*. Поток энергии, являющейся скалярной величиной, определяется вектором; поток же импульса, который сам есть вектор, определяется тензором второго ранга.

Вектор (7,4) определяет поток вектора импульса в направлении $\mathbf{n}$, т. е. через поверхность, перпендикулярную к $\mathbf{n}$. В частности, выбирая направление единичного вектора $\mathbf{n}$ вдоль направления скорости жидкости, мы найдем, что в этом направлении переносится лишь продольная компонента импульса, причем плотность ее потока равна

$$p + \rho v^2.$$

В направлении же, перпендикулярном к скорости, переносится лишь поперечная (по отношению к $\mathbf{v}$) компонента импульса, а плотность ее потока равна просто p.

§ 8. Сохранение циркуляции скорости

Интеграл

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l},$$

взятый вдоль замкнутого контура, называют *циркуляцией скорости* вдоль этого контура.

Рассмотрим замкнутый контур, проведенный в жидкости в некоторый момент времени. Будем рассматривать его как «жидкий», т. е. как составленный из находящихся на нем частиц жидкости. С течением времени эти частицы передвигаются, а с ними перемещается и весь контур. Выясним, что происходит при этом с циркуляцией скорости вдоль контура. Другими словами, вычислим производную по времени

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l}.$$

Мы пишем здесь полную производную по времени соответственно тому, что ищем изменение циркуляции вдоль перемещающегося жидкого контура, а не вдоль контура, неподвижного в пространстве.

Во избежание путаницы будем временно обозначать дифференцирование по координатам знаком δ, оставив знак d для дифференцирования по времени. Кроме того, заметим, что элемент $d\mathbf{l}$ длины контура можно написать в виде разности $\delta\mathbf{r}$ радиус-векторов $\mathbf{r}$ точек двух концов этого элемента. Таким образом, напишем циркуляцию скорости в виде

$$\oint \mathbf{v}\,\delta\mathbf{r}.$$

При дифференцировании этого интеграла по времени надо иметь в виду, что меняется не только скорость, но и сам контур (т. е. его форма). Поэтому, внося знак дифференцирования по времени под знак интеграла, надо дифференцировать не только $\mathbf{v}$, но и $\delta\mathbf{r}$:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\,\delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,\delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v}\,\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}.$$

Поскольку скорость $\mathbf{v}$ есть не что иное, как производная по времени от радиус-вектора $\mathbf{r}$, то

$$\mathbf{v}\,\frac{d\,\delta\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\delta\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\,\delta\mathbf{v} = \delta\frac{v^2}{2}.$$

Но интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю. Поэтому второй из написанных интегралов исчезает и остается

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\,\delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,\delta\mathbf{r}.$$

Теперь остается подставить сюда для ускорения $d\mathbf{v}/dt$ его выражение согласно (2,9):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} w.$$

Применив формулу Стокса, получаем тогда (поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{grad} w \equiv 0$):

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,\delta\mathbf{r} = \int \operatorname{rot}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,\delta\mathbf{f} = 0.$$

Таким образом, переходя к прежним обозначениям, находим окончательно[1]:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = 0,$$

или

$$\oint \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = \mathrm{const}. \qquad (8,1)$$

[1]) Этот результат сохраняет силу и в однородном поле тяжести, так как $\operatorname{rot}\mathbf{g} \equiv 0$.

Мы приходим к результату, что (в идеальной жидкости) циркуляция скорости вдоль замкнутого жидкого контура остается неизменной со временем. Это утверждение называют *теоремой Томсона* (*W. Thomson*, 1869) или *законом сохранения циркуляции скорости*. Подчеркнем, что он получен путем использования уравнения Эйлера в форме (2,9) и потому связан с предположением об изэнтропичности движения жидкости. Для неизэнтропического движения этот закон не имеет места [1]).

Применив теорему Томсона к бесконечно малому замкнутому контуру δC и преобразовав интеграл по теореме Стокса, получим:

$$\oint \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\mathbf{f} \approx \delta\mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathrm{const}, \tag{8,2}$$

где $d\mathbf{f}$ — элемент жидкой поверхности, опирающийся на контур δC. Вектор $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ часто называют *завихренностью* [2]) течения жидкости в данной ее точке. Постоянство произведения (8,2) можно наглядно истолковать, сказав, что завихренность переносится вместе с движущейся жидкостью.

Задача

Показать, что при неизэнтропическом течении для каждой перемещающейся частицы остается постоянным связанное с ней значение произведения $(\nabla s\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v})/\rho$ (*H. Ertel*, 1942).

Решение. При неизэнтропическом движении правая сторона уравнения Эйлера (2,3) не может быть заменена на $-\nabla w$ и вместо уравнения (2,11) получается

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{\rho^2}[\nabla\rho\cdot\nabla p]$$

(для краткости обозначено $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$). Умножим это равенство на ∇s; поскольку $s = s(p, \rho)$, то ∇s выражается линейно через ∇p и $\nabla\rho$ и произведение $\nabla s[\nabla\rho\cdot\nabla p] = 0$. После этого выражение в правой стороне уравнения преобразуем следующим образом:

$$\nabla s\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla s\cdot\operatorname{rot}[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] = -\operatorname{div}[\nabla s[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]] = -\operatorname{div}(\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}\nabla s)) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}\nabla s)) =$$
$$= -(\boldsymbol{\omega}\nabla s)\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\operatorname{grad}(\boldsymbol{\omega}\nabla s) + \boldsymbol{\omega}\operatorname{grad}(\mathbf{v}\nabla s).$$

Согласно (2,6) заменяем $(\mathbf{v}\nabla s) = -\partial s/\partial t$ и получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}\nabla s) + \mathbf{v}\operatorname{grad}(\boldsymbol{\omega}\nabla s) + (\boldsymbol{\omega}\nabla s)\operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

---

[1]) С математической точки зрения необходимо, чтобы между p и ρ существовала однозначная связь (при изэнтропическом движении она определяется уравнением $s(p,\rho) = \mathrm{const}$). Тогда вектор $-\nabla p/\rho$ может быть написан в виде градиента некоторой функции, что и требуется для вывода теоремы Томсона.

[2]) По английской терминологии — vorticity.

Первые два члена объединяются в $d(\omega\nabla s)/dt$ (где $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)$), а в последнем заменяем согласно (1,3) $\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = -d\rho/dt$. В результате получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\omega \nabla s}{\rho} = 0,$$

чем и выражается искомый закон сохранения.

§ 9. Потенциальное движение

Из закона сохранения циркуляции скорости можно вывести важное следствие. Будем считать сначала, что движение жидкости стационарно и рассмотрим линию тока, о которой известно, что в некоторой ее точке $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. Проведем бесконечно малый контур, охватывающий линию тока вокруг этой точки; с течением времени он будет передвигаться вместе с жидкостью, все время охватывая собой ту же самую линию тока. Из постоянства произведения (8,2) следует поэтому, что $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ будет равен нулю вдоль всей линии тока.

Таким образом, если в какой-либо точке линии тока завихренность отсутствует, то она отсутствует и вдоль всей этой линии. Если движение жидкости не стационарно, то этот результат остается в силе, с той разницей, что надо говорить не о линии тока, а о траектории, описываемой с течением времени некоторой определенной жидкой частицей (напоминаем, что при нестационарном движении эти траектории не совпадают, вообще говоря, с линиями тока)[1].

На первый взгляд отсюда можно было бы сделать следующий вывод. Рассмотрим стационарное обтекание какого-либо тела потоком жидкости. На бесконечности натекающий поток однороден; его скорость $\mathbf{v} = \text{const}$, так что $\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0$ на всех линиях тока. Отсюда можно было бы заключить, что $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ будет равен нулю и вдоль всей длины всех линий тока, т. е. во всем пространстве.

Движение жидкости, при котором во всем пространстве $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, называется *потенциальным* (или *безвихревым*) в противоположность *вихревому* движению, при котором ротор скорости отличен от нуля. Таким образом, мы пришли бы к результату, что стационарное обтекание всякого тела натекающим из бесконечности однородным потоком должно быть потенциальным.

Аналогичным образом из закона сохранения циркуляции скорости можно было бы сделать еще и следующий вывод. Предположим, что в некоторый момент времени движение жидкости

[1] Во избежание недоразумений отметим уже здесь, что этот результат теряет смысл при турбулентном движении. Отметим также, что завихренность может появиться на линии тока после пересечения ею так называемой ударной волны; мы увидим, что это связано с нарушением изэнтропичности течения (§ 114).