зывается *потенциалом скорости*; мы будем обозначать его посредством φ:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{9,2}$$

Написав уравнение Эйлера в виде (2,10)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] = -\nabla w$$

и подставив в него $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, получаем:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w \right) = 0,$$

откуда находим следующее равенство:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t), \tag{9,3}$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. Это равенство представляет собой первый интеграл уравнений потенциального движения. Функция $f(t)$ в равенстве (9,3) может быть без ограничения общности положена равной нулю за счет неоднозначности в определении потенциала: поскольку скорость определяется производными от φ по координатам, можно прибавить к φ любую функцию времени.

При стационарном движении имеем (выбирая потенциал φ не зависящим от времени) $\partial \varphi / \partial t = 0$, $f(t) = \text{const}$, и (9,3) переходит в уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const}. \tag{9,4}$$

Необходимо подчеркнуть здесь следующее существенное отличие между уравнениями Бернулли в случае потенциального и непотенциального движений. В общем случае произвольного движения const в правой части этого уравнения есть величина, постоянная вдоль каждой данной линии тока, но, вообще говоря, различная для разных линий тока. При потенциальном же движении const в уравнении Бернулли есть величина, постоянная во всем объеме жидкости. Это обстоятельство в особенности повышает роль уравнения Бернулли при исследовании потенциального движения.

§ 10. Несжимаемая жидкость

В очень многих случаях течения жидкостей (и газов) их плотность можно считать неизменяющейся, т. е. постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения. Другими словами, в этих случаях при движении не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. О таком движении говорят как о движении *несжимаемой жидкости*.

Общие уравнения гидродинамики сильно упрощаются при применении их к несжимаемой жидкости. Правда, уравнение Эйлера не меняет своего вида, если положить в нем $\rho = \mathrm{const}$, за исключением только того, что в уравнении (2,4) можно внести ρ под знак градиента:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \mathbf{g}. \tag{10,1}$$

Зато уравнение непрерывности принимает при $\rho = \mathrm{const}$ простой вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{10,2}$$

Поскольку плотность не является теперь неизвестной функцией, как это имеет место в общем случае, то в качестве основной системы уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости можно выбрать уравнения, содержащие только скорость. Такими уравнениями являются уравнение непрерывности (10,2) и уравнение (2,11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot}\,[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}]. \tag{10,3}$$

Уравнение Бернулли тоже может быть написано для несжимаемой жидкости в более простом виде. Уравнение (10,1) отличается от общего уравнения Эйлера (2,9) тем, что вместо ∇w в нем стоит $\nabla(p/\rho)$. Поэтому мы можем сразу написать уравнение Бернулли, заменив просто в (5,4) тепловую функцию отношением p/ρ:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \mathrm{const}. \tag{10,4}$$

Для несжимаемой жидкости можно писать p/ρ вместо w также и в выражении (6,3) для потока энергии, которое принимает тогда вид

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right). \tag{10,5}$$

Действительно, согласно известному термодинамическому соотношению имеем для изменения внутренней энргии выражение $d\varepsilon = T\,ds - p\,dV$; при $s = \mathrm{const}$ и $V = 1/\rho = \mathrm{const}$ имеем $d\varepsilon = 0$, т. е. $\varepsilon = \mathrm{const}$. Поскольку же постоянные члены в энергии несущественны, то можно опустить ε и в $w = \varepsilon + p/\rho$.

В особенности упрощаются уравнения для потенциального течения несжимаемой жидкости. Уравнение (10,3) удовлетворяется при $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ тождественно. Уравнение же (10,2) при подстановке $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ превращается в

$$\Delta \varphi = 0, \tag{10,6}$$

т. е. в уравнение Лапласа для потенциала φ [1]). К этому уравнению должны быть добавлены граничные условия на поверхностях соприкосновения жидкости с твердыми телами: на неподвижных твердых поверхностях нормальная к поверхности компонента v_n скорости жидкости должна быть равна нулю, а в общем случае движущихся твердых тел v_n должна быть равна проекции скорости движения тела на направление той же нормали (эта скорость является заданной функцией времени). Скорость v_n равна, с другой стороны, производной от потенциала φ по направлению нормали: $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Таким образом, граничные условия гласят в общем случае, что $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ является на границах заданной функцией времени и координат.

При потенциальном движении скорость связана с давлением уравнением (9,3). В случае несжимаемой жидкости в этом уравнении можно писать p/ρ вместо w:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t). \tag{10,7}$$

Отметим здесь следующее важное свойство потенциального движения несжимаемой жидкости. Пусть через жидкость движется какое-нибудь твердое тело. Если возникающее при этом течение жидкости является потенциальным, то это течение зависит в каждый момент только от скорости движущегося тела в этот же момент времени, но, например, не от его ускорения. Действительно, самое уравнение (10,6) не содержит времени явно; время входит в решение лишь через граничные условия, содержащие только скорость движущегося в жидкости тела.

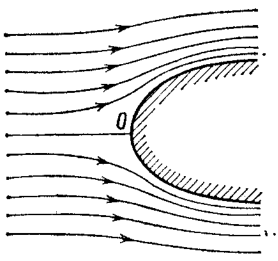

Рис. 2

Из уравнения Бернулли $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$ видно, что при стационарном движении несжимаемой жидкости (без поля тяжести) наибольшее значение давления достигается в точках, где скорость обращается в нуль. Такая точка обычно имеется на поверхности обтекаемого жидкостью тела (точка O на рис. 2) и называется *критической точкой*. Если u — скорость натекающего на тело потока жидкости (т. е. скорость жидкости на бесконечности), а p_0 — давление на бесконечности, то давление в критической точке равно

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\rho u^2}{2}. \tag{10,8}$$

[1]) Потенциал скорости был впервые введен *Эйлером*. Им же было получено для этой величины уравнение вида (10,6), получившее впоследствии название уравнения Лапласа.

Если распределение скоростей в движущейся жидкости зависит только от двух кородинат, скажем от x и y, причем скорость параллельна везде плоскости xy, то о таком течении говорят как о *двухмерном* или *плоском*. Для решения задач о двухмерном течении несжимаемой жидкости иногда бывает удобным выражать скорость через так называемую функцию тока. Из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

видно, что компоненты скорости могут быть написаны в виде производных

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10,9}$$

от некоторой функции $\psi(x, y)$, называемой *функцией тока*. Уравнение непрерывности при этом удовлетворяется автоматически. Уравнение же, которому должна удовлетворять функция тока, получается подстановкой (10,9) в уравнение (10,3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} = 0. \tag{10,10}$$

Зная функцию тока, можно непосредственно определить форму линий тока для стационарного движения жидкости. Действительно, дифференциальное уравнение линий тока (при двухмерном течении) есть

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

или $v_y\,dx - v_x\,dy = 0$; оно выражает собой тот факт, что направление касательной к линии тока в каждой точке совпадает с направлением скорости. Подставляя сюда (10,9), получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = d\psi = 0,$$

откуда $\psi = \text{const}$. Таким образом, линии тока представляют собой семейство кривых, получающихся приравниванием функции тока $\psi(x, y)$ произвольной постоянной.

Если между двумя точками *1* и *2* в плоскости x, y провести кривую, то поток жидкости Q через эту кривую определится разностью значений функции тока в этих точках независимо от формы кривой. Действительно, если v_n — проекция скорости на нормаль к кривой в данной ее точке, то

$$Q = \rho\int_1^2 v_n\,dl = \rho\int_1^2(-v_y\,dx + v_x\,dy) = \rho\int_1^2 d\psi,$$

или

$$Q = \rho(\psi_2 - \psi_1). \tag{10,11}$$

Мощные методы решения задач о плоском потенциальном обтекании несжимаемой жидкостью различных профилей связаны с применением к ним теории функций комплексного переменного[1]). Основание для этих применений заключается в следующем. Потенциал и функция тока связаны с компонентами скорости посредством[2])

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Но такие соотношения между производными функций φ и ψ с математической точки зрения совпадают с известными условиями Коши-Римана, выражающими собой тот факт, что комплексное выражение

$$w = \varphi + i\psi \tag{10,12}$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. Это значит, что функция $w(z)$ будет иметь в каждой точке определенную производную

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y. \tag{10,13}$$

Функцию w называют *комплексным потенциалом*, а $\frac{dw}{dz}$ — комплексной скоростью. Модуль и аргумент последней определяют абсолютную величину скорости v и угол θ ее наклона к направлению оси x:

$$\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta}. \tag{10,14}$$

На твердой поверхности обтекаемого контура скорость должна быть направлена по касательной к нему. Другими словами, контур должен совпадать с одной из линий тока, т. е. на нем должно быть $\psi = \text{const}$; эту постоянную можно выбрать равной нулю, и тогда задача об обтекании жидкостью заданного контура сводится к определению аналитической функции $w(z)$, принимающей на этом контуре вещественные значения. Более сложна постановка задачи в случаях, когда жидкость имеет свободную поверхность (такой пример — см. задачу 9 к этому параграфу).

Интеграл от аналитической функции по какому-либо замкнутому контуру C равен, как известно, умноженной на $2\pi i$ сумме

---

[1]) Подробное изложение этих методов и их многочисленных применений может быть найдено во многих курсах и монографиях по гидродинамике с более математическим уклоном. Здесь мы ограничиваемся лишь объяснением основной идеи метода.

[2]) Напомним, однако, что существование самой по себе функции тока связано только с двухмерностью течения, и отнюдь не требует его потенциальности.

вычетов этой функции относительно ее простых полюсов, расположенных внутри C; поэтому

$$\oint w'\,dz = 2\pi i \sum_k A_k,$$

где A_k — вычеты комплексной скорости. С другой стороны, имеем:

$$\oint w'\,dz = \oint (v_x - iv_y)(dx + i\,dy) =$$
$$= \oint (v_x\,dx + v_y\,dy) + i\oint (v_x\,dy - v_y\,dx).$$

Вещественная часть этого выражения есть не что иное, как циркуляция Γ скорости по контуру C. Мнимая же часть (умноженная на ρ) представляет собой поток жидкости через этот контур; при отсутствии внутри контура источников жидкости этот поток равен нулю, и тогда имеем просто

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k \tag{10,15}$$

(все вычеты A_k при этом чисто мнимые).

Наконец, остановимся на условиях, при выполнении которых жидкость можно считать несжимаемой. При адиабатическом изменении давления на Δp плотность жидкости изменится на

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \Delta p.$$

Но согласно уравнению Бернулли колебания давления в стационарно движущейся жидкости — порядка величины $\Delta p \sim \rho v^2$. Производная же $(\partial p/\partial\rho)_s$ представляет собой (как мы увидим в § 64) квадрат скорости звука c в жидкости. Таким образом, находим оценку

$$\Delta\rho \sim \rho v^2/c^2.$$

Жидкость можно считать несжимаемой, если $\Delta\rho/\rho \ll 1$. Мы видим, что необходимым условием для этого является малость скорости ее движения по сравнению со скоростью звука:

$$v \ll c. \tag{10,16}$$

Это условие достаточно, однако, только при стационарном движении. При нестационарном движении необходимо выполнение еще одного условия. Пусть τ и l — величины порядка промежутков времени и расстояний, на которых скорость жидкости испытывает заметное изменение. Сравнив члены $\partial\mathbf{v}/\partial t$ и $\nabla p/\rho$ в уравнении Эйлера, получим, по порядку величины, $v/\tau \sim \Delta p/l\rho$ или $\Delta p \sim l\rho v/\tau$, а соответствующее изменение ρ есть $\Delta\rho \sim l\rho v/\tau c^2$. Сравнив теперь члены $\partial\rho/\partial t$ и $\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ в уравнении непрерывности, найдем, что производной $\partial\rho/\partial t$ можно пренебречь (т. е. можно считать, что $\rho = \mathrm{const}$) в случае, если $\Delta\rho/\tau \ll \rho v/l$ или

$$\tau \gg \frac{l}{c}. \qquad (10,17)$$

Выполнение обоих условий (10,16) и (10,17) достаточно для того, чтобы можно было считать жидкость несжимаемой. Условие (10,17) имеет наглядный смысл — оно означает, что время l/c, в течение которого звуковой сигнал пройдет расстояние l, мало по сравнению со временем τ, в течение которого заметно изменяется движение жидкости и, таким образом, дает возможность рассматривать процесс распространения взаимодействий в жидкости как мгновенный.

Задачи

1. Определить форму поверхности несжимаемой жидкости в поле тяжести в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω.

Решение. Ось z выбираем по оси цилиндра. Тогда $v_x = -\Omega y$, $v_y = \Omega x$, $v_z = 0$. Уравнение непрерывности удовлетворяется автоматически, а уравнение Эйлера (10,1) дает:

$$x\Omega^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad y\Omega^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

Общий интеграл этих уравнений есть

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) - gz + \mathrm{const}.$$

На свободной поверхности $p = \mathrm{const}$, так что эта поверхность является параболоидом: $z = \left(\frac{\Omega^2}{2g}\right)(x^2 + y^2)$ (начало координат — в низшей точке поверхности).

2. Шар (радиуса R) движется в несжимаемой идеальной жидкости. Определить потенциальное течение жидкости вокруг шара.

Решение. На бесконечности скорость жидкости должна обращаться в нуль. Обращающимися на бесконечности в нуль решениями уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ являются, как известно, $1/r$ и производные различных порядков от $1/r$ по координатам (начало координат — в центре шара). Ввиду полной симметрии шара в решение может войти лишь один постоянный вектор — скорость $\mathbf{u}$, а ввиду линейности уравнения Лапласа и граничного условия к нему φ должно содержать $\mathbf{u}$ линейным образом. Единственным скаляром, который можно составить из $\mathbf{u}$ и производных от $1/r$, является произведение $\mathbf{u}\nabla(1/r)$. Соответственно этому ищем φ в виде

$$\varphi = \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{An}}{r^2}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора). Постоянная $\mathbf{A}$ определяется из условия равенства нормальных к поверхности шара компонент скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ ($\mathbf{vn} = \mathbf{un}$) при $r = R$. Это условие дает $A = uR^3/2$, так что

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^2}\mathbf{un}, \quad \mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}].$$

Распределение давления определяется формулой (10,7):

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

(p_0 — давление на бесконечности). При вычислении производной $\partial\varphi/\partial t$ надо иметь в виду, что начало координат (выбранное нами в центре шара) смещается со временем со скоростью $\mathbf{u}$. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \nabla \varphi.$$

Распределение давления на поверхности шара дается формулой

$$p = p_0 + \frac{\rho u^2}{8} (9 \cos^2 \theta - 5) + \frac{\rho}{2} R \mathbf{n} \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

(θ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{u}$).

3. То же для бесконечного цилиндра, движущегося перпендикулярно к своей оси[1]).

Решение. Течение не зависит от координаты вдоль оси цилиндра, так что приходится решать двухмерное уравнение Лапласа. Обращающимися в нуль на бесконечности решениями являются производные от $\ln r$ по координатам, начиная от первого порядка и выше ($\mathbf{r}$ — перпендикулярный к оси цилиндра радиус-вектор). Ищем решение в виде

$$\varphi = \mathbf{A} \nabla \ln r = \frac{\mathbf{A}\mathbf{n}}{r}$$

и с помощью граничных условий получаем $\mathbf{A} = -R^2 \mathbf{u}$, так что

$$\varphi = -\frac{R^2}{r} \mathbf{u}\mathbf{n}, \quad v = \frac{R^2}{r^2} [2\mathbf{n} (\mathbf{u}\mathbf{n}) - \mathbf{u}].$$

Давление на поверхности цилиндра дается формулой

$$p = p_0 + \frac{\rho u^2}{2} (4 \cos^2 \theta - 3) + \rho R \mathbf{n} \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

4. Определить потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости в эллипсоидальном сосуде, вращающемся вокруг одной из своих главных осей с угловой скоростью Ω; определить полный момент импульса жидкости в сосуде.

Решение. Выбираем декартовы координаты x, y, z вдоль осей эллипсоида в данный момент времени; ось вращения совпадает с осью z. Скорость стенки сосуда есть $\mathbf{u} = [\Omega \mathbf{r}]$, так что граничное условие $v_n = \partial\varphi/\partial n = u_n$ есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \Omega (x n_y - y n_x),$$

или, используя уравнение эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$:

$$\frac{x}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy\Omega \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right).$$

---

[1]) Решение более общих задач о потенциальном обтекании эллипсоида и цилиндра эллиптического сечения см. в книгах:

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — Физматгиз, 1963, ч. 1, гл. VII; *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947, §§ 103—116 (*Lamb H.* Hydrodynamics. — Cambridge, 1932).

Решение уравнение Лапласа, удовлетворяющее этому условию, есть

$$\varphi = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \tag{1}$$

Момент импульса жидкости в сосуде

$$M = \rho \int (xv_y - yv_x)\, dV.$$

Интегрируя по объему эллипсоида, получаем

$$M = \frac{\Omega \rho V}{5} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

Формула (1) определяет абсолютное движение жидкости, отнесенное к мгновенному положению осей x, y, z, связанных с вращающимся сосудом. Движение же относительно сосуда (т. е. относительно вращающейся системы координат x, y, z), получится вычитанием скорости $[\Omega \mathbf{r}]$ из абсолютной скорости жидкости; обозначив относительную скорость жидкости $\mathbf{v}'$, имеем

$$v'_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Omega y = \frac{2\Omega a^2}{a^2 + b^2} y, \qquad v'_y = -\frac{2\Omega b^2}{a^2 + b^2} x, \qquad v'_z = 0.$$

Траектории относительного движения получаются путем интегрирования уравнений $\dot{x} = v'_x$, $\dot{y} = v'_y$ и представляют эллипсы $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \text{const}$, подобные граничному эллипсу.

5. Определить течение жидкости вблизи критической точки на обтекаемом теле (рис. 2).

Решение. Малый участок поверхности тела вблизи критической точки можно рассматривать как плоский. Выбираем его в качестве плоскости xy. Разлагая φ при малых x, y, z в ряд, имеем с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz$$

(постоянный член в φ несуществен). Постоянные коэффициенты определяем так, чтобы φ удовлетворяло уравнению $\Delta\varphi = 0$ и граничным условиям $v_z = \partial\varphi/\partial z = 0$ при $z = 0$ и всех x, y и $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = 0$ при $x = y = z = 0$ (в критической точке). Это дает

$$a = b = c = 0; \; C = -A - B, \; E = F = 0.$$

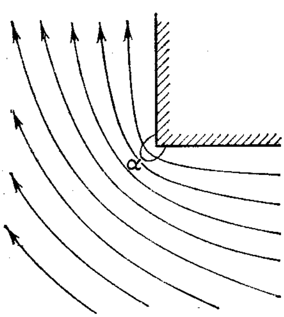

Рис. 3

Член Dxy может быть всегда исключен соответствующим поворотом осей x и y. В результате получаем:

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2. \tag{1}$$

Если течение обладает аксиальной симметрией вокруг оси z (симметричное обтекание тела вращения), то должно быть $A = B$, так что

$$\varphi = A(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Компоненты скорости равны

$$v_x = 2Ax, \quad v_y = 2Ay, \quad v_z = -4Az.$$

Линии тока определяются уравнениями (5; 2), откуда $x^2 z = c_1$, $y^2 z = c_2$, т. е. линии тока являются кубическими гиперболами.

Если течение является однородным вдоль оси y (например, при обтекании в направлении оси z цилиндра с осью вдоль оси y), то в (1) должно быть $B = 0$, так что

$$\varphi = A(x^2 - z^2).$$

Линиями тока являются гиперболы $xz = \text{const}$.

6. Определить движение жидкости при потенциальном обтекании угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями (вблизи вершины угла).

Решение. Выбираем полярные координаты r, θ в плоскости поперечного сечения, перпендикулярной к линии пересечения плоскостей, с началом в вершине угла. Угол θ отсчитывается от одной из прямых, образующих сечение угла. Пусть α есть величина обтекаемого угла; при $\alpha < \pi$ течение происходит внутри угла, при $\alpha > \pi$ — вне его. Граничное условие исчезновения нормальной составляющей скорости гласит $d\varphi/d\theta = 0$ при $\theta = 0$ и α. Удовлетворяющее этому условию решение уравнения Лапласа пишем в виде[1])

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \quad n = \pi/\alpha,$$

так что

$$v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta, \quad v_\theta = -nA^{n-1} \sin n\theta.$$

При $n < 1$ (обтекание выпуклого угла; рис. 3) v обращается в начале координат в бесконечность как $r^{-(1-n)}$. При $n > 1$ (течение внутри вогнутого угла — рис. 4) v обращается при $r = 0$ в нуль.

Функция тока, определяющая форму линий тока, есть

$$\psi = Ar^n \sin n\theta.$$

Полученные для φ и ψ выражения являются вещественной и мнимой частями комплексного потенциала $w = Az^n$ [2]).

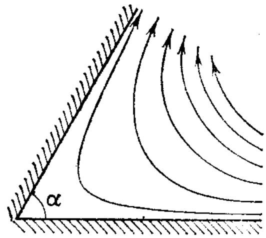

Рис. 4

7. Из несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, внезапно удаляется сферический объем радиуса a. Определить время, в течение которого образовавшаяся полость заполнится жидкостью (*Besant*, 1859; *Rayleigh*, 1917).

Решение. Движение жидкости после образования полости будет центрально-симметрическим со скоростями, направленными в каждой точке по радиусу к центру. Для радиальной скорости

$$v_r \equiv v < 0$$

имеем уравнение Эйлера (в сферических координатах)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1)$$

Уравнение непрерывности дает:

$$r^2 v = F(t), \quad (2)$$

где $F(t)$ — произвольная функция времени; это равенство выражает собой тот факт, что в силу несжимаемости жидкости объем, протекающий через сферу любого радиуса, не зависит от последнего.

Подставляя v из (2) в (1), имеем:

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

[1]) Выбираем решение с наиболее низкой (малые r!) положительной степенью r.

[2]) Задачи 5 и 6, если рассматривать граничные плоскости в них как бесконечные, вырождены в том смысле, что значения постоянных коэффициентов A, B в их решениях остаются неопределенными. В реальных случаях обтекания конечных тел эти значения определяются условиями задачи в целом.

Интегрируя это уравнение по r в пределах от ∞ до радиуса

$$R = R(t) \leqslant a$$

заполняющейся полости, получим:

$$-\frac{F'(t)}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}, \tag{3}$$

где $V = dR(t)/dt$ — скорость изменения радиуса полости, а p_0 — давление на бесконечности; скорость жидкости на бесконечности, а также давление на поверхности полости равны нулю. Написав соотношение (2) для точек на поверхности полости, находим:

$$F(t) = R^2(t)\, V(t),$$

и, подставив это выражение для $F(t)$ в (3), получим следующее уравнение:

$$-\frac{3V^2}{2} - \frac{1}{2} R \frac{dV^2}{dR} = \frac{p_0}{\rho}. \tag{4}$$

В этом уравнении переменные разделяются и, интегрируя его при начальном условии $V = 0$ при $R = a$ (в начальный момент жидкость покоилась), найдем:

$$V = \frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)}.$$

Отсюда имеем для искомого полного времени заполнения полости:

$$\tau = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{(a/R)^3 - 1}}.$$

Этот интеграл приводится к виду B-интеграла Эйлера, и вычисление дает окончательно:

$$\tau = \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}}\, \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} = 0{,}915a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}.$$

8. Погруженная в несжимаемую жидкость сфера расширяется по заданному закону $R = R(t)$. Определить давление жидкости на поверхности сферы.

Решение. Обозначим искомое давление посредством $P(t)$. Вычисления в точности аналогичны произведенным в предыдущей задаче с той лишь разницей, что при $r = R$ давление равно не нулю, а $P(t)$. В результате получим вместо (3) уравнение

$$-\frac{F'(t)}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

и соответственно вместо (4) уравнение

$$\frac{p_0 - P(t)}{\rho} = -\frac{3V^2}{2} - RV\frac{dV}{dR}.$$

Имея в виду, что $V = dR/dt$, можно привести выражение для $P(t)$ к виду

$$P(t) = p_0 + \frac{\rho}{2}\left[\frac{d^2(R^2)}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right].$$

9. Определить форму струи, вытекающей из бесконечно длинной щели прорезанной в плоской стенке.

Решение. Пусть в плоскости x, y стенка совпадает с осью x, отверстие есть отрезок $-a/2 \leqslant x \leqslant a/2$ этой оси, а жидкость занимает полуплоскость $y > 0$. Вдали от стенки (при $y \to \infty$) скорость жидкости равна нулю, а давление пусть будет p_0.

На свободной поверхности струя (BC и $B'C'$ на рис. 5, а) давление $p=0$, а скорость согласно уравнению Бернулли имеет постоянную величину $v_1 = \sqrt{2p_0/\rho}$. Линии стенки, продолжающиеся в свободную границу струи, представляют собой линии тока. Пусть на линии ABC $\psi = 0$; тогда на линии $A'B'C'$ $\psi = -Q/\rho$, где $Q = \rho a_1 v_1$ — расход жидкости в струе (a_1, v_1 — ширина

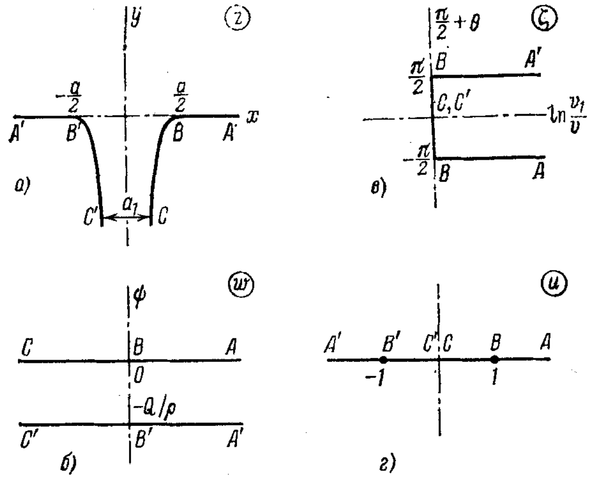

Рис. 5

струи и скорость жидкости в ней на бесконечности). Потенциал φ меняется как на линии ABC, так и на линии $A'B'C'$ от $-\infty$ до $+\infty$; пусть в точках B и B' $\varphi = 0$. Тогда в плоскости комплексного переменного w области течения будет соответствовать бесконечная полоса ширины Q/ρ (обозначения точек на рис. 5, б — г соответствуют обозначениям на рис. 5, а в плоскости x, y).

Введем новую комплексную переменную — логарифм комплексной скорости:

$$\zeta = -\ln\left[\frac{1}{v_1 e^{i\pi/2}}\frac{dw}{dz}\right] = \ln\frac{v_1}{v} + i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \qquad (1)$$

($v_1 e^{i\pi/2}$ — комплексная скорость на бесконечности струи). На $A'B'$ имеем $\theta = 0$; на AB $\theta = -\pi$ на BC и $B'C'$ $v = v_1$, причем на бесконечности струи $\theta = -\pi/2$. Поэтому в плоскости переменного ζ области течения соответствует полуполоса ширины π, расположенная в правой полуплоскости (рис. 5, в). Если мы теперь найдем конформное преобразование, переводящее полосу плоскости w в полуполосу плоскости ζ (с указанным на рис. 5 соответствием точек), то тем самым мы определим w как функцию от dw/dz; функция w может быть найдена затем одной квадратурой.

Для того чтобы найти искомое преобразование, введем еще одну вспомогательную комплексную переменную u, такую, чтобы в плоскости u области течения соответствовала верхняя полуплоскость, причем точкам B и B' соответствуют точки $u = \pm 1$, точкам C, C' $u = 0$, а бесконечно удаленным точкам A и A' $u = \pm\infty$ (рис. 5, г). Зависимость w от этой вспомогательной переменной определяется конформным преобразованием, переводящим верхнюю полуплоскость u в полосу плоскости w. При условленном соответствии точек это есть

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi}\ln u. \tag{2}$$

Чтобы найти зависимость ζ от u, надо найти конформное отображение полуполосы плоскости ζ в верхнюю полуплоскость u. Рассматривая эту полуполосу как треугольник, одна из вершин которого удалена в бесконечность, можно найти искомое отображение с помощью известной формулы Шварца — Кристоффеля; ответ гласит

$$\zeta = -i\arcsin u. \tag{3}$$

Формулы (2), (3) решают задачу, определяя в параметрическом виде зависимость dw/dz от w.

Определим форму струи. На BC имеем $w=\varphi$, $\zeta = i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$, а u меняется между 0 и 1. Из (2) и (3) получим:

$$\varphi = -\frac{Q}{\rho\pi}\ln(-\cos\theta), \tag{4}$$

а из (1) $d\varphi/dz = v_1 e^{-i\theta}$, или

$$dz = dx + i\,dy = \frac{1}{v_1}e^{i\theta}\,d\varphi = \frac{a_1}{\pi}e^{i\theta}\operatorname{tg}\theta\,d\theta,$$

откуда интегрированием (с условиями $y=0$, $x=a/2$ при $\theta=-\pi$) найдем в параметрическом виде форму струи. В частности, для сжатия струи получается $a_1/a = \pi/(2+\pi) = 0{,}61$.

§ 11. Сила сопротивления при потенциальном обтекании

Рассмотрим задачу о потенциальном обтекании несжимаемой идеальной жидкостью какого-либо твердого тела. Такая задача, конечно, полностью эквивалентна задаче об определении течения жидкости при движении через нее того же тела. Для получения второго случая из первого достаточно перейти к системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится. Мы будем говорить ниже именно о движении твердого тела через жидкость.

Определим характер распределения скоростей в жидкости на больших расстояниях от движущегося тела. Потенциальное движение несжимаемой жидкости определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Мы должны рассмотреть такие решения этого уравнения, которые обращаются на бесконечности в нуль, поскольку жидкость на бесконечности неподвижна. Выберем начало координат где-нибудь внутри движущегося тела (эта система координат движется вместе с телом; мы, однако, рассматриваем распределение скоростей в жидкости в некоторый заданный момент времени). Как известно, уравнение Лапласа имеет решением $1/r$, где r — расстояние от начала координат. Решением являются также градиент $\nabla(1/r)$ и следующие производные от $1/r$ по координатам. Все эти решения (и их линейные