нюю полуплоскость u в полосу плоскости w. При условленном соответствии точек это есть

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi}\ln u. \qquad (2)$$

Чтобы найти зависимость ζ от u, надо найти конформное отображение полуполосы плоскости ζ в верхнюю полуплоскость u. Рассматривая эту полуполосу как треугольник, одна из вершин которого удалена в бесконечность, можно найти искомое отображение с помощью известной формулы Шварца — Кристоффеля; ответ гласит

$$\zeta = -i\arcsin u. \qquad (3)$$

Формулы (2), (3) решают задачу, определяя в параметрическом виде зависимость dw/dz от w.

Определим форму струи. На BC имеем $w = \varphi$, $\zeta = i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$, а u меняется между 0 и 1. Из (2) и (3) получим:

$$\varphi = -\frac{Q}{\rho\pi}\ln(-\cos\theta), \qquad (4)$$

а из (1) $d\varphi/dz = v_1 e^{-i\theta}$, или

$$dz = dx + i\,dy = \frac{1}{v_1}e^{i\theta}\,d\varphi = \frac{a_1}{\pi}e^{i\theta}\operatorname{tg}\theta\,d\theta,$$

откуда интегрированием (с условиями $y = 0$, $x = a/2$ при $\theta = -\pi$) найдем в параметрическом виде форму струи. В частности, для сжатия струи получается $a_1/a = \pi/(2+\pi) = 0{,}61$.

§ 11. Сила сопротивления при потенциальном обтекании

Рассмотрим задачу о потенциальном обтекании несжимаемой идеальной жидкостью какого-либо твердого тела. Такая задача, конечно, полностью эквивалентна задаче об определении течения жидкости при движении через нее того же тела. Для получения второго случая из первого достаточно перейти к системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится. Мы будем говорить ниже именно о движении твердого тела через жидкость.

Определим характер распределения скоростей в жидкости на больших расстояниях от движущегося тела. Потенциальное движение несжимаемой жидкости определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Мы должны рассмотреть такие решения этого уравнения, которые обращаются на бесконечности в нуль, поскольку жидкость на бесконечности неподвижна. Выберем начало координат где-нибудь внутри движущегося тела (эта система координат движется вместе с телом; мы, однако, рассматриваем распределение скоростей в жидкости в некоторый заданный момент времени). Как известно, уравнение Лапласа имеет решением $1/r$, где r — расстояние от начала координат. Решением являются также градиент $\nabla(1/r)$ и следующие производные от $1/r$ по координатам. Все эти решения (и их линейные комбинации) обращаются на бесконечности в нуль. Поэтому общий вид искомого решения уравнения Лапласа на больших расстояниях от тела есть

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} + \ldots,$$

где a, $\mathbf{A}$ не зависят от координат; опущенные члены содержат производные высших порядков от $1/r$. Легко видеть, что постоянная a должна быть равной нулю. Действительно, потенциал $\varphi = -a/r$ дает скорость

$$\mathbf{v} = -\nabla\frac{a}{r} = \frac{a\mathbf{r}}{r^3}.$$

Вычислим соответствующий поток жидкости через какую-нибудь замкнутую поверхность, скажем, сферу с радиусом R. На этой поверхности скорость постоянна и равна a/R^2; поэтому полный поток жидкости через нее равен $\rho(a/R^2)4\pi R^2 = 4\pi\rho a$. Между тем, поток несжимаемой жидкости через всякую замкнутую поверхность должен, очевидно, обращаться в нуль. Поэтому заключаем, что должно быть $a = 0$.

Таким образом, φ содержит члены, начиная с членов порядка $1/r^2$. Поскольку мы ищем скорость на больших расстояниях, то члены более высоких порядков можно опустить, и мы получаем:

$$\varphi = \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{An}}{r^2}, \tag{11,1}$$

а для скорости $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}\nabla)\nabla\frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{An})\mathbf{n} - \mathbf{A}}{r^3} \tag{11,2}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$). Мы видим, что на больших расстояниях скорость падает, как $1/r^3$. Вектор $\mathbf{A}$ зависит от конкретной формы и скорости движения тела и может быть определен только путем полного решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ на всех расстояниях, с учетом соответствующих граничных условий на поверхности движущегося тела.

Входящий в (11,2) вектор $\mathbf{A}$ связан определенным образом с полным импульсом и с полной энергией жидкости, обтекающей движущееся в ней тело. Полная кинетическая энергия жидкости (внутренняя энергия несжимаемой жидкости постоянна) есть

$$E = \frac{\rho}{2}\int v^2\,dV,$$

где интегрирование производится по всему пространству вне тела. Выделим из пространства часть V, ограниченную сферой большого радиуса R, с центром в начале координат и будем интегрировать сначала только по объему V, имея в виду стремить затем R к бесконечности. Имеем тождественно

$$\int v^2\,dV = \int u^2\,dV + \int (\mathbf{v}+\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dV,$$

где $\mathbf{u}$ — скорость тела. Поскольку $\mathbf{u}$ есть не зависящая от координат величина, то первый интеграл равен просто $u^2(V-V_0)$, где V_0 — объем тела. Во втором же интеграле пишем сумму $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ в виде $\nabla(\varphi+\mathbf{ur})$ и, воспользовавшись также тем, что $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ в силу уравнения непрерывности, а $\operatorname{div}\mathbf{u}\equiv 0$, имеем:

$$\int v^2\,dV = u^2(V-V_0) + \int \operatorname{div}\{(\varphi+\mathbf{ur})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\}\,dV.$$

Второй интеграл преобразуем в интеграл по поверхности S сферы и поверхности S_0 тела:

$$\int v^2\,dV = u^2(V-V_0) + \oint\limits_{S+S_0} (\varphi+\mathbf{ur})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,d\mathbf{f}.$$

На поверхности тела нормальные компоненты $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ равны друг другу в силу граничных условий; поскольку вектор $d\mathbf{f}$ направлен как раз по нормали к поверхности, то ясно, что интеграл по S_0 тождественно обращается в нуль. На удаленной же поверхности S подставляем для φ и $\mathbf{v}$ выражения (11,1—2) и опускаем члены, обращающиеся в нуль при переходе к пределу по $R\to\infty$. Написав элемент поверхности сферы S в виде $d\mathbf{f}=\mathbf{n}R^2do$, где do — элемент телесного угла, получим:

$$\int v^2\,dV = u^2\left(\frac{4\pi}{3}R^3 - V_0\right) + \int \{3(\mathbf{An})(\mathbf{un}) - (\mathbf{un})^2 R^3\}\,do.$$

Наконец, произведя интегрирование[1]) и умножив на $\rho/2$, получаем окончательно следующее выражение для полной энергии жидкости:

$$E = \frac{\rho}{2}(4\pi\mathbf{Au} - V_0u^2). \qquad (11,3)$$

Как уже указывалось, точное вычисление вектора $\mathbf{A}$ требует полного решения уравнения $\Delta\varphi=0$ с учетом конкретных граничных условий на поверхности тела. Общий характер зависимости $\mathbf{A}$ от скорости $\mathbf{u}$ тела можно, однако, установить уже непосредственно из факта линейности уравнения для φ и линейности (как по φ, так и по $\mathbf{u}$) граничных условий к этому уравнению. Из этой линейности следует, что $\mathbf{A}$ должно быть линейной

---

[1]) Интегрирование по do эквивалентно усреднению подынтегрального выражения по всем направлениям вектора $\mathbf{n}$ и умножению затем на 4π. Для усреднения выражений типа $(\mathbf{An})(\mathbf{Bn}) \equiv A_in_iB_kn_k$ ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — постоянные векторы), пишем

$$\overline{(\mathbf{An})(\mathbf{Bn})} = A_iB_k\overline{n_in_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}A_iB_k = \frac{1}{3}\mathbf{AB}.$$

же функцией от компонент вектора $\mathbf{u}$. Определяемая же формулой (11,3) энергия E является, следовательно, квадратичной функцией компонент вектора $\mathbf{u}$ и потому может быть представлена в виде

$$E=\frac{m_{ik}u_iu_k}{2}, \tag{11,4}$$

где m_{ik} — некоторый постоянный симметрический тензор, компоненты которого могут быть вычислены с помощью компонент вектора $\mathbf{A}$; его называют тензором *присоединенных масс.*

Зная энергию E, можно получить выражение для полного импульса $\mathbf{P}$ жидкости. Для этого замечаем, что бесконечно малые изменения E и $\mathbf{P}$ связаны друг с другом соотношением $dE=\mathbf{u}\,d\mathbf{P}$[1]); отсюда следует, что если E выражено в виде (11,4), то компоненты $\mathbf{P}$ должны иметь вид

$$P_i=m_{ik}u_k. \tag{11,5}$$

Наконец, сравнение формул (11,3—5) показывает, что $\mathbf{P}$ выражается через $\mathbf{A}$ следующим образом:

$$\mathbf{P}=4\pi\rho\mathbf{A}-\rho V_0\mathbf{u}. \tag{11,6}$$

Следует обратить внимание на то, что полный импульс жидкости оказывается вполне определенной конечной величиной.

Передаваемый в единицу времени от тела к жидкости импульс есть $d\mathbf{P}/dt$. Взятый с обратным знаком, он определяет, очевидно, реакцию $\mathbf{F}$ жидкости, т. е. действующую на тело силу:

$$\mathbf{F}=-\frac{d\mathbf{P}}{dt}. \tag{11,7}$$

Параллельная скорости тела составляющая $\mathbf{F}$ называется *силой сопротивления*, а перпендикулярная составляющая — *подъемной силой.*

---

[1]) Действительно, пусть тело ускоряется под влиянием какой-либо внешней силы $\mathbf{F}$. В результате импульс жидкости будет возрастать; пусть $d\mathbf{P}$ есть его приращение в течение времени dt. Это приращение связано с силой посредством $d\mathbf{P}=\mathbf{F}\,dt$, а умноженное на скорость $\mathbf{u}$ дает $\mathbf{u}\,d\mathbf{P}=\mathbf{F}\mathbf{u}\,dt$, т. е. работу силы $\mathbf{F}$ на пути $\mathbf{u}dt$, которая в свою очередь должна быть равна увеличению энергии dE жидкости.

Следует заметить, что вычисление импульса непосредственно как интеграла $\int \rho\mathbf{v}\,dV$ по всему объему жидкости было бы невозможным. Дело в том, что этот интеграл (со скоростью $\mathbf{v}$, распределенной по (11,2)) расходится в том смысле, что результат интегрирования, хотя и конечен, но зависит от способа взятия интеграла: производя интегрирование по большой области, размеры которой устремляются затем к бесконечности, мы получили бы значение, зависящее от формы области (сфера, цилиндр и т. п.). Используемый же нами способ вычисления импульса, исходя из соотношения $\mathbf{u}\,d\mathbf{P}=dE$, приводит ко вполне определенному конечному значению (даваемому формулой (11,6)), заведомо удовлетворяющему физическому условию о связи изменения импульса с действующими на тело силами.

Если бы было возможно потенциальное обтекание равномерно движущегося в идеальной жидкости тела, то было бы $\mathbf{P} = \text{const}$ (так как $\mathbf{u} = \text{const}$) и $\mathbf{F} = 0$. Другими словами, отсутствовала бы как сила сопротивления, так и подъемная сила, т. е. действующие на поверхность тела со стороны жидкости силы давления взаимно компенсируются (так называемый *парадокс Даламбера*). Происхождение этого «парадокса» в особенности очевидно для силы сопротивления. Действительно, наличие этой силы при равномерном движении тела означало бы, что для поддержания движения какой-либо внешний источник должен непрерывно производить работу, которая либо диссипируется в жидкости, либо преобразуется в ее кинетическую энергию, приводя к постоянно уходящему на бесконечность потоку энергии в движущейся жидкости. Но никакой диссипации энергии в идеальной жидкости, по определению, нет, а скорость приводимой телом в движение жидкости настолько быстро убывает с увеличением расстояния от тела, что никакого потока энергии на бесконечности тоже нет.

Следует, однако, подчеркнуть, что все эти соображения относятся лишь к движению тела в неограниченной жидкости. Если же, например, жидкость имеет свободную поверхность, то равномерно движущееся параллельно этой поверхности тело будет испытывать силу сопротивления. Появление этой силы (называемой *волновым сопротивлением*) связано с возникновением на свободной поверхности жидкости системы распространяющихся по ней волн, непрерывно уносящих энергию на бесконечность.

Пусть некоторое тело совершает под влиянием действующей на него внешней силы $\mathbf{f}$ колебательное движение. При соблюдении рассмотренных в предыдущем параграфе условий окружающая тело жидкость совершает потенциальное движение, и для вывода уравнений движения тела можно воспользоваться полученными выше соотношениями. Сила $\mathbf{f}$ должна быть равна производной по времени от полного импульса системы, равного сумме импульса $M\mathbf{u}$ тела (M — масса тела) и импульса $\mathbf{P}$ жидкости:

$$M\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f}.$$

С помощью (11,5) получаем отсюда:

$$M\frac{du_i}{dt} + m_{ik}\frac{du_k}{dt} = f_i,$$

что можно написать также и в виде

$$\frac{du_k}{dt}(M\delta_{ik} + m_{ik}) = f_i. \tag{11,8}$$

Это и есть уравнение движения тела, погруженного в идеальную жидкость.

Рассмотрим теперь в некотором смысле обратный вопрос. Пусть сама жидкость производит под влиянием каких-либо внешних (по отношению к телу) причин колебательное движение. Под влиянием этого движения погруженное в жидкость тело тоже начинает двигаться[1]). Выведем уравнение этого движения.

Будем предполагать, что скорость движения жидкости мало меняется на расстояниях порядка величины линейных размеров тела. Пусть $\mathbf{v}$ есть скорость жидкости в месте нахождения тела, которую она имела бы, если бы тела вообще не было; другими словами, $\mathbf{v}$ есть скорость основного движения жидкости. По сделанному предположению $\mathbf{v}$ можно считать постоянной вдоль всего объема, занимаемого телом. Посредством $\mathbf{u}$ по-прежнему обозначаем скорость тела.

Силу, действующую на тело и приводящую его в движение, можно определить из следующих соображений. Если бы тело полностью увлекалось жидкостью (т. е. было бы $\mathbf{v} = \mathbf{u}$), то на него действовала бы такая же сила, которая бы действовала на жидкость в объеме тела, если бы тела вовсе не было. Импульс этого объема жидкости есть $\rho V_0 \mathbf{v}$, и потому действующая на него сила равна $\rho V_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Но в действительности тело не увлекается полностью жидкостью; возникает движение тела относительно жидкости, в результате чего сама жидкость приобретает некоторое дополнительное движение. Связанный с этим дополнительным движением импульс жидкости равен $m_{ik}(u_k - v_k)$ (в выражении (11,5) надо теперь писать вместо $\mathbf{u}$ скорость $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ движения тела относительно жидкости). Изменение этого импульса со временем приводит к появлению дополнительной силы реакции, действующей на тело и равной $-m_{ik}d(u_k - v_k)/dt$. Таким образом, полная сила, действующая на тело, равна

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Эту силу надо приравнять производной по времени от импульса тела. Таким образом, приходим к следующему уравнению движения:

$$\frac{d}{dt} M u_i = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Интегрируя с обеих сторон по времени, получаем отсюда:

$$(M\delta_{ik} + m_{ik}) u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik}) v_k. \tag{11,9}$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю, поскольку скорость $\mathbf{u}$ тела, приводимого жидкостью в движение, должна

[1]) Речь может идти, например, о движении тела в жидкости, по которой распространяется звуковая волна с длиной волны, большой по сравнению с размерами тела.

обратиться в нуль вместе со скоростью жидкости $\mathbf{v}$. Полученное соотношение определяет скорость тела по скорости жидкости. Если плотность тела равна плотности жидкости ($M = \rho V_0$), то, как и следовало ожидать, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Задачи

1. Получить уравнение движения для шара, совершающего колебательное движение в идеальной жидкости, и для шара, приводимого в движение колеблющейся жидкостью.

Решение. Сравнивая (11,1) с выражением для φ, полученным для обтекания шара в задаче 2 § 10, видим, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}R^3/2$$

(R — радиус шара). Полный импульс приводимой шаром в движение жидкости есть согласно (11,6) $\mathbf{P} = 2\pi\rho R^3\mathbf{u}/3$, так что тензор m_{ik} равен

$$m_{ik} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\delta_{ik}.$$

Испытываемая движущимся шаром сила сопротивления равна

$$\mathbf{F} = -\frac{2\pi}{3}\rho R^3\frac{d\mathbf{u}}{dt},$$

а уравнение движения колеблющегося в жидкости шара гласит:

$$\frac{4\pi R^3}{3}\left(\rho_0 + \frac{\rho}{2}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}$$

(ρ_0 — плотность вещества шара). Коэффициент при $\dot{\mathbf{u}}$ можно рассматривать как некоторую эффективную массу шара; она складывается из массы самого шара и из присоединенной массы, равной в данном случае половине массы жидкости, вытесняемой шаром.

Если шар приводится в движение жидкостью, то для его скорости получаем из (11,9) выражение

$$\mathbf{u} = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0}\mathbf{v}.$$

Если плотность шара превышает плотность жидкости ($\rho_0 > \rho$), то $u < v$, т. е. шар отстает от жидкости; если же $\rho_0 < \rho$, то шар опережает ее.

2. Выразить действующий на движущееся в жидкости тело момент сил через вектор $\mathbf{A}$.

Решение. Как известно из механики, действующий на тело момент сил $\mathbf{M}$ определяется по его функции Лагранжа (в данном случае — по энергии E) соотношением $\delta E = \mathbf{M}\delta\boldsymbol{\theta}$, где $\delta\boldsymbol{\theta}$ — вектор бесконечно малого угла поворота тела, а δE — изменение E при этом повороте. Вместо того чтобы поворачивать тело на угол $\delta\boldsymbol{\theta}$ (и соответственно менять компоненты m_{ik}), можно повернуть на угол $-\delta\boldsymbol{\theta}$ жидкость относительно тела и соответственно изменить скорость $\mathbf{u}$. Имеем при повороте $\delta\mathbf{u} = -[\delta\boldsymbol{\theta}\mathbf{u}]$, так что

$$\delta E = \mathbf{P}\delta\mathbf{u} = -\delta\boldsymbol{\theta}\,[\mathbf{u}\mathbf{P}].$$

Используя выражение (11,6) для $\mathbf{P}$, получаем отсюда искомую формулу

$$\mathbf{M} = -[\mathbf{u}\mathbf{P}] = 4\pi\rho\,[\mathbf{A}\mathbf{u}].$$