§ 12. Гравитационные волны

Свободная поверхность жидкости, находящейся в равновесии в поле тяжести, — плоская. Если под влиянием какого-либо внешнего воздействия поверхность жидкости в каком-нибудь месте выводится из ее равновесного положения, то в жидкости возникает движение. Это движение будет распространяться вдоль всей поверхности жидкости в виде волн, называемых *гравитационными,* поскольку они обусловливаются действием поля тяжести. Гравитационные волны происходят в основном на поверхности жидкости, захватывая внутренние ее слои тем меньше, чем глубже эти слои расположены.

Мы будем рассматривать здесь такие гравитационные волны, в которых скорость движущихся частиц жидкости настолько мала, что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ по сравнению с $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Легко выяснить, что означает это условие физически. В течение промежутка времени порядка периода τ колебаний, совершаемых частицами жидкости в волне, эти частицы проходят расстояние порядка амплитуды a волны. Поэтому скорость их движения — порядка $v \sim a/\tau$. Скорость v заметно меняется на протяжении интервалов времени порядка τ и на протяжении расстояний порядка λ вдоль направления распространения волны (λ — длина волны). Поэтому производная от скорости по времени — порядка v/τ, а по координатам — порядка v/λ. Таким образом, условие $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \partial\mathbf{v}/\partial t$ эквивалентно требованию

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2 \ll \frac{a}{\tau}\frac{1}{\tau},$$

или

$$a \ll \lambda, \tag{12,1}$$

т. е. амплитуда колебаний в волне должна быть мала по сравнению с длиной волны. В § 9 мы видели, что если в уравнении движения можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, то движение жидкости потенциально. Предполагая жидкость несжимаемой, мы можем воспользоваться поэтому уравнениями (10,6) и (10,7). В уравнении (10,7) мы можем теперь пренебречь членом $v^2/2$, содержащим квадрат скорости; положив $f(t) = 0$ и введя в поле тяжести член $\rho g z$, получим:

$$p = -\rho g z - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{12,2}$$

Ось z выбираем, как обычно, вертикально вверх, а в качестве плоскости x, y выбираем равновесную плоскую поверхность жидкости.

Будем обозначать z-координату точек поверхности жидкости посредством ζ; ζ является функцией координат x, y и времени t. В равновесии $\zeta = 0$, так что ζ есть вертикальное смещение жидкой поверхности при ее колебаниях. Пусть на поверхность жидкости действует постоянное давление p_0. Тогда имеем на поверхности согласно (12,2)

$$p_0 = -\rho g\zeta - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Постоянную p_0 можно устранить переопределением потенциала φ (прибавлением к нему независящей от координат величины $p_0 t/\rho$). Тогда условие на поверхности жидкости примет вид

$$g\zeta + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\zeta} = 0. \qquad (12,3)$$

Малость амплитуды колебаний в волне означает, что смещение ζ мало. Поэтому можно считать, в том же приближении, что вертикальная компонента скорости движения точек поверхности совпадает с производной по времени от смещения ζ: $v_z = \partial\zeta/\partial t$. Но $v_z = \partial\varphi/\partial z$, так что имеем:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{z=\zeta}.$$

В силу малости колебаний можно в этом условии взять значения производных при $z = 0$ вместо $z = \zeta$. Таким образом, получаем окончательно следующую систему уравнений, определяющих движение в гравитационной волне:

$$\Delta\varphi = 0, \qquad (12,4)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0. \qquad (12,5)$$

Будем рассматривать волны на поверхности жидкости, считая эту поверхность неограниченной. Будем также считать, что длина волны мала по сравнению с глубиной жидкости; тогда можно рассматривать жидкость как бесконечно глубокую. Поэтому мы не пишем граничных условий на боковых границах и на дне жидкости.

Рассмотрим гравитационную волну, распространяющуюся вдоль оси x и однородную вдоль оси y; в такой волне все величины не зависят от координаты y. Будем искать решение, являющееся простой периодической функцией времени и координаты x:

$$\varphi = \cos(kx - \omega t)\, f(z),$$

где ω — циклическая частота (мы будем говорить о ней просто как о частоте), k — волновой вектор волны, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны. Подставив это выражение в уравнение $\Delta\varphi = 0$, получим для функции $f(z)$ уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0.$$

Его решение, затухающее в глубь жидкости (т. е. при $z \to -\infty$):

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t). \tag{12,6}$$

Мы должны еще удовлетворить граничному условию (12,5). Подставив в него (12,6), найдем связь между частотой и волновым вектором (или, как говорят, *закон дисперсии* волн):

$$\omega^2 = kg. \tag{12,7}$$

Распределение скоростей в жидкости получается дифференцированием потенциала по координатам:

$$v_x = -Ake^{kz}\sin(kx - \omega t), \quad v_z = Ake^{kz}\cos(kx - \omega t). \tag{12,8}$$

Мы видим, что скорость экспоненциально падает по направлению в глубь жидкости. В каждой заданной точке пространства (т. е. при заданных x, z) вектор скорости равномерно вращается в плоскости x, z, оставаясь постоянным по своей величине.

Определим еще траекторию частиц жидкости в волне. Обозначим временно посредством x, z координаты движущейся частицы жидкости (а не координаты неподвижной точки в пространстве), а посредством x_0, z_0 — значения x, z для равновесного положения частицы. Тогда $v_x = dx/dt$, $v_z = dz/dt$, а в правой части (12,8) можно приближенно написать x_0, z_0 вместо x, z, воспользовавшись малостью колебаний. Интегрирование по времени дает тогда:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t); \\ z - z_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\sin(kx_0 - \omega t). \end{aligned} \tag{12,9}$$

Таким образом, частицы жидкости описывают окружности вокруг точек x_0, z_0 с радиусом, экспоненциально убывающим по направлению в глубь жидкости.

Скорость U распространения волны равна, как будет показано в § 67, $U = \partial\omega/\partial k$. Подставив сюда $\omega = \sqrt{kg}$, находим, что скорость распространения гравитационных волн на неограниченной поверхности бесконечно глубокой жидкости равна

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{12,10}$$

Она растет при увеличении длины волны.

Длинные гравитационные волны

Рассмотрев гравитационные волны, длина которых мала по сравнению с глубиной жидкости, остановимся теперь на противоположном предельном случае волн, длина которых велика по сравнению с глубиной жидкости. Такие волны называются *длинными*.

Рассмотрим сначала распространение длинных волн в канале. Длину канала (направленную вдоль оси x) будем считать неограниченной Сечение канала может иметь произвольную форму и может меняться вдоль его длины. Площадь поперечного сечения жидкости в канале обозначим посредством $S = S(x, t)$. Глубина и ширина канала предполагаются малыми по сравнению с длиной волны.

Мы будем рассматривать здесь продольные длинные волны, в которых жидкость движется вдоль канала. В таких волнах компонента v_x скорости вдоль длины канала велика по сравнению с компонентами v_y, v_z.

Обозначив v_x просто как v и опуская малые члены, мы можем написать x-компоненту уравнения Эйлера в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

а z-компоненту — в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

(квадратичные по скорости члены опускаем, поскольку амплитуда волны по-прежнему считается малой). Из второго уравнения имеем, замечая, что на свободной поверхности ($z = \zeta$) должно быть $p = p_0$:

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z).$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \qquad (12,11)$$

Второе уравнение для определения двух неизвестных v и ζ можно вывести методом, аналогичным выводу уравнения непрерывности. Это уравнение представляет собой по существу уравнение непрерывности применительно к рассматриваемому случаю. Рассмотрим объем жидкости, заключенный между двумя плоскостями поперечного сечения канала, находящимися на расстоянии dx друг от друга. За единицу времени через одну плоскость войдет объем жидкости, равный $(Sv)_x$, а через другую плоскость выйдет объем $(Sv)_{x+dx}$. Поэтому объем жидкости между обеими плоскостями изменится на

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial (Sv)}{\partial x}dx.$$

Но в силу несжимаемости жидкости это изменение может произойти только за счет изменения ее уровня. Изменение объема жидкости между рассматриваемыми плоскостями в единицу времени равно

$$\frac{\partial S}{\partial t}\,dx.$$

Следовательно, можно написать:

$$\frac{\partial S}{\partial t}\,dx = -\frac{\partial (Sv)}{\partial x}\,dx,$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Sv)}{\partial x} = 0. \qquad (12,12)$$

Это и есть искомое уравнение непрерывности.

Пусть S_0 есть площадь поперечного сечения жидкости в канале при равновесии. Тогда $S = S_0 + S'$, где S' — изменение этой площади благодаря наличию волны. Поскольку изменение уровня жидкости в волне мало, то S' можно написать в виде $b\zeta$, где b — ширина сечения канала у самой поверхности жидкости в нем. Уравнение (12,12) приобретает тогда вид

$$b\,\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (S_0 v)}{\partial x} = 0. \qquad (12,13)$$

Дифференцируя (12,13) по t и подставляя $\frac{\partial v}{\partial t}$ из (12,11), получим:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(S_0\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 0. \qquad (12,14)$$

Если сечение канала одинаково вдоль всей его длины, то $S_0 = \mathrm{const}$ и

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{gS_0}{b}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \qquad (12,15)$$

Уравнение такого вида называется *волновым*; как будет показано в § 64, оно соответствует распространению волн с не зависящей от частоты скоростью U, равной квадратному корню из коэффициента при $\partial^2\zeta/\partial x^2$. Таким образом, скорость распространения длинных гравитационных волн в каналах равна

$$U = \sqrt{\frac{gS_0}{b}}. \qquad (12,16)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть длинные волны в обширном бассейне, который мы будем считать неограниченным в двух измерениях (вдоль плоскости x, y). Глубину жидкости в бассейне обозначим посредством h. Из трех компонент скорости малой является теперь компонента v_z. Уравнения Эйлера приобретают вид, аналогичный (12,11):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g\,\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \qquad (12,17)$$

Уравнение непрерывности выводится аналогично (12,12) и имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (hv_x)}{\partial x}+\frac{\partial (hv_y)}{\partial y}=0.$$

Глубину h пишем в виде $h=h_0+\zeta$, где h_0 — равновесная глубина. Тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial (h_0v_x)}{\partial x}+\frac{\partial (h_0v_y)}{\partial y}=0. \qquad (12,18)$$

Предположим, что бассейн имеет плоское горизонтальное дно ($h_0=\mathrm{const}$). Дифференцируя (12,18) по t и подставляя (12,17), получим:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-gh_0\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=0. \qquad (12,19)$$

Это — опять уравнение типа волнового (двухмерного) уравнения; оно соответствует волнам со скоростью распространения, равной

$$U=\sqrt{gh_0}. \qquad (12,20)$$

Задачи

1. Определить скорость распространения гравитационных волн на неограниченной поверхности жидкости, глубина которой равна h.

Решение. На дне жидкости нормальная составляющая скорости должна быть равна нулю, т. е.

$$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=-h.$$

Из этого условия определяется отношение между постоянными A и B в общем решении

$$\varphi=\cos(kx-\omega t)\left\{Ae^{kz}+Be^{-kz}\right\}.$$

В результате находим:

$$\varphi=A\cos(kx-\omega t)\,\mathrm{ch}\,k(z+h).$$

Из предельного условия (12,5) находим соотношение между k и ω в виде

$$\omega^2=gk\,\mathrm{th}\,kh.$$

Скорость распространения волны

$$U=\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k\,\mathrm{th}\,kh}}\left\{\mathrm{th}\,kh+\frac{kh}{\mathrm{ch}^2\,kh}\right\}.$$

При $kh\gg1$ получается результат (12,10), а при $kh\ll1$ — результат (12,20).

2. Определить связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн на поверхности раздела двух жидкостей, причем верхняя жидкость ограничена сверху, а нижняя — снизу горизонтальными неподвижными плоскостями. Плотность и глубина слоя нижней жидкости ρ и h, а верхней ρ' и h' (причем $\rho>\rho'$).

Решение. Плоскость x, y выбираем по плоскости раздела обеих жидкостей в равновесии. Ищем решение в обеих жидкостях соответственно в виде

$$\varphi = A \operatorname{ch} k(z+h)\cos(kx-\omega t),$$
$$\varphi' = B \operatorname{ch} k(z-h')\cos(kx-\omega t) \qquad (1)$$

(так, чтобы удовлетворялись условия на верхней и нижней границах, — см. решение задачи 1). На поверхности раздела давление должно быть непрерывным; согласно (12,2) это приводит к условию

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho' g\zeta + \rho'\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$$

(при $z=0$) или

$$\zeta = \frac{1}{g(\rho-\rho')}\left(\rho'\frac{\partial\varphi'}{\partial t} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (2)$$

Кроме того, скорости v_z обеих жидкостей на поверхности раздела должны быть одинаковыми. Это приводит к условию (при $z=0$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi'}{\partial z}. \qquad (3)$$

Далее, $v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$ и, подставляя сюда (2), получаем:

$$g(\rho-\rho')\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \rho'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (4)$$

Подставляя (1) в (3) и (4), получим два однородных линейных уравнения для A и B, из условия совместности которых найдем:

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho-\rho')}{\rho \operatorname{cth} kh + \rho' \operatorname{cth} kh'}.$$

При $kh \gg 1$, $kh' \gg 1$ (обе жидкости очень глубоки):

$$\omega^2 = kg\frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'},$$

а при $kh \ll 1$, $kh' \ll 1$ (длинные волны):

$$\omega^2 = k^2\frac{g(\rho-\rho')hh'}{\rho h' + \rho' h}$$

Наконец, если $kh \gtrsim 1$, $kh' \ll 1$:

$$\omega^2 = k^2 gh'\frac{\rho-\rho'}{\rho}.$$

3. Определить связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн, распространяющихся одновременно по поверхности раздела и верхней поверхности двух слоев жидкости, из которых нижняя (плотность ρ) бесконечно глубока, а верхняя (плотность ρ') имеет толщину h' и свободную верхнюю поверхность.

Решение. Выбираем плоскость x, y в плоскости раздела обеих жидкостей в равновесии. В нижней и верхней жидкостях ищем решение соответственно в виде

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx-\omega t); \qquad \varphi' = [Be^{-kz} + Ce^{kz}]\cos(kx-\omega t). \qquad (1)$$

На поверхности раздела обеих жидкостей (т. е. при $z = 0$) имеют место условия (см. задачу 2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}; \quad g(\rho - \rho')\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

а на верхней свободной границе (т. е. при $z = h'$):

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Первое из уравнений (2) при подстановке (1) дает $A = C - B$, а два остальных условия дают два уравнения для B и C, из условия совместности которых получаем квадратное уравнение для ω^2 с корнями:

$$\omega^2 = kg \frac{(\rho - \rho')\left(1 - e^{-2kh'}\right)}{\rho + \rho' + (\rho - \rho')\, e^{-2kh'}}, \qquad \omega^2 = kg.$$

При $h' \to \infty$ эти корни соответствуют волнам, распространяющимся независимо по поверхности раздела и по верхней поверхности жидкости.

4. Определить собственные частоты колебаний (см. § 69) жидкости глубины h в прямоугольном бассейне ширины a и длины b.

Решение. Оси x и y выбираем по двум боковым сторонам бассейна. Ищем решение в виде стоячей волны:

$$\varphi = \cos \omega t \operatorname{ch} k(z + h)\, f(x, y).$$

Для f получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0,$$

а условие на свободной поверхности приводят, как и в задаче 1, к соотношению

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh.$$

Решение уравнения для f берем в виде

$$f = \cos px \cos qy, \qquad p^2 + q^2 = k^2.$$

На боковых сторонах сосуда должны выполняться условия:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ a;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ b.$$

Отсюда находим:

$$p = \frac{m\pi}{a}, \qquad q = \frac{n\pi}{b},$$

где m, n — целые числа. Поэтому возможные значения k равны

$$k^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

§ 13. Внутренние волны в несжимаемой жидкости

Своеобразные гравитационные волны могут распространяться внутри несжимаемой жидкости. Их происхождение связано с вызываемой наличием поля тяжести неоднородностью жидкости: ее