На поверхности раздела обеих жидкостей (т. е. при $z=0$) имеют место условия (см. задачу 2):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi'}{\partial z}; \quad g(\rho-\rho')\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\rho'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}-\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

а на верхней свободной границе (т. е. при $z=h'$):

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}=0. \tag{3}$$

Первое из уравнений (2) при подстановке (1) дает $A=C-B$, а два остальных условия дают два уравнения для B и C, из условия совместности которых получаем квадратное уравнение для ω^2 с корнями:

$$\omega^2=kg\frac{(\rho-\rho')\left(1-e^{-2kh'}\right)}{\rho+\rho'+(\rho-\rho')\,e^{-2kh'}}, \qquad \omega^2=kg.$$

При $h'\to\infty$ эти корни соответствуют волнам, распространяющимся независимо по поверхности раздела и по верхней поверхности жидкости.

4. Определить собственные частоты колебаний (см. § 69) жидкости глубины h в прямоугольном бассейне ширины a и длины b.

Решение. Оси x и y выбираем по двум боковым сторонам бассейна. Ищем решение в виде стоячей волны:

$$\varphi=\cos\omega t\,\operatorname{ch}k(z+h)\,f(x,y).$$

Для f получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+k^2 f=0,$$

а условие на свободной поверхности приводят, как и в задаче 1, к соотношению

$$\omega^2=gk\operatorname{th}kh.$$

Решение уравнения для f берем в виде

$$f=\cos px\cos qy, \qquad p^2+q^2=k^2.$$

На боковых сторонах сосуда должны выполняться условия:

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ a;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=0,\ b.$$

Отсюда находим:

$$p=\frac{m\pi}{a}, \qquad q=\frac{n\pi}{b},$$

где m, n — целые числа. Поэтому возможные значения k равны

$$k^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right).$$

§ 13. Внутренние волны в несжимаемой жидкости

Своеобразные гравитационные волны могут распространяться внутри несжимаемой жидкости. Их происхождение связано с вызываемой наличием поля тяжести неоднородностью жидкости: ее давление (а с ним и энтропия s) непременно будет меняться с высотой; поэтому всякое смещение какого-либо участка жидкости по высоте приведет к нарушению механического равновесия, а потому к возникновению колебательного движения. Действительно, ввиду адиабатичности движения этот участок принесет с собой в новое место свое значение энтропии s, отличное от ее равновесного значения в этом месте.

Мы будем ниже предполагать, что длина распространяющейся в жидкости волны мала по сравнению с расстояниями, на которых поле тяжести вызывает заметное изменение плотности [1]). Самую жидкость мы будем при этом рассматривать как несжимаемую. Это значит, что можно пренебречь изменением ее плотности, связанным с изменением давления в волне. Изменением же плотности, связанным с тепловым расширением, отнюдь нельзя пренебречь, так как именно оно определяет собой все явление.

Выпишем систему гидродинамических уравнений для рассматриваемого движения. Будем отмечать значения величин в состоянии механического равновесия индексом нуль, а малые отклонения от этих значений в волне — штрихом. Тогда уравнение сохранения энтропии $s = s_0 + s'$ напишется с точностью до величин первого порядка малости в виде

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v}\,\nabla s_0 = 0, \qquad (13,1)$$

где s_0, как и равновесные значения других величин, является заданной функцией вертикальной координаты z.

Далее, в уравнении Эйлера снова пренебрегаем (в силу малости колебаний) членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$; учитывая также, что равновесное распределение давления определяется уравнением $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$, получим с той же точностью

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2}\rho'.$$

Поскольку согласно сказанному выше изменение плотности связано только с изменением энтропии, но не давления, то можно написать:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s',$$

---

[1]) Градиент плотности связан с градиентом давления равенством

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \nabla\rho = c^2\,\nabla\rho,$$

где c — скорость звука в жидкости. Поэтому из гидростатического уравнения $\nabla p = \rho \mathbf{g}$ имеем $\nabla\rho = (\rho/c^2)\mathbf{g}$. Отсюда видно, что существенное изменение плотности в поле тяжести происходит на расстояниях $l \approx c^2/g$. Для воздуха $l \approx 10$ км, для воды $l \approx 200$ км.

и мы получим уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s' - \nabla \frac{p'}{\rho_0}. \tag{13,2}$$

ρ_0 можно ввести под знак градиента, так как изменением равновесной плотности на расстояних порядка длины волны мы, согласно сказанному выше, все равно пренебрегаем. По этой же причине можно считать плотность постоянной и в уравнении непрерывности, которое сводится при этом к

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{13,3}$$

Будем искать решение системы уравнений (13,1—3) в виде плоской волны:

$$\mathbf{v} = \mathrm{const} \cdot e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

и аналогично для s' и p'. Подстановка в уравнение непрерывности (13,3) дает

$$\mathbf{vk} = 0, \tag{13,4}$$

т. е. скорость жидкости везде перпендикулярна к волновому вектору (поперечная волна). Уравнения же (13,1) и (13,2) дают

$$i\omega s' = \mathbf{v}\nabla s_0, \quad -i\omega \mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\mathbf{g} - \frac{i\mathbf{k}}{\rho_0} p'.$$

Условие $\mathbf{kv} = 0$, примененное ко второму из этих равенств, приводит к соотношению

$$ik^2 p' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'(\mathbf{gk}),$$

и исключая затем из обоих уравнений $\mathbf{v}$ и s', получим искомый закон дисперсии — соотношение между частотой и волновым вектором:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sin^2\theta, \tag{13,5}$$

где обозначено

$$\omega_0^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz}. \tag{13,6}$$

Мы опускаем здесь и ниже индекс нуль у равновесных значений термодинамических величин; ось z направлена вертикально вверх, а θ есть угол между осью z и направлением $\mathbf{k}$. Положительность выражения (13,6) обеспечивается условием устойчивости равновесного распределения $s(z)$ (условием отсутствия конвекции, см. § 4).

Мы видим, что частота оказывается зависящей только от направления волнового вектора, но не от его величины. При $\theta = 0, \pi$ получается $\omega = 0$; это означает, что волны рассматриваемого типа с волновым вектором, направленным вертикально, вообще невозможны.

Если жидкость находится не только в механическом, но и в полном термодинамическом равновесии, то ее температура постоянна и можно написать:

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = -\rho g \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T.$$

Наконец, воспользовавшись известными термодинамическими соотношениями

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

(c_p — теплоемкость единицы массы жидкости), получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{c_p}\frac{g}{\rho}\left|\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right|}. \tag{13,7}$$

В частности, для термодинамически идеального газа эта формула дает

$$\omega_0 = \frac{g}{\sqrt{c_p T}}. \tag{13,8}$$

Зависимость частоты от направления волнового вектора приводит к тому, что скорость распространения волны $\mathbf{U} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ не совпадает по направлению с $\mathbf{k}$. Представив зависимость $\omega(\mathbf{k})$ в виде

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}}{k}\right)^2}$$

($\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении вертикально вверх) и произведя дифференцирование, получим

$$\mathbf{U} = -\frac{\omega_0^2}{\omega k}(\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})\{\boldsymbol{\nu} - (\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})\mathbf{n}\}, \tag{13,9}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Эта скорость перпендикулярна к вектору $\mathbf{k}$, а по величине равна

$$U = \frac{\omega_0}{k}\cos\theta.$$

Ее проекция на вертикаль:

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\nu} = -\frac{\omega_0}{k}\cos\theta\sin\theta.$$

§ 14. Волны во вращающейся жидкости

Другой своеобразный тип внутренних волн может распространяться в равномерно вращающейся как целое несжимаемой жидкости. Их происхождение связано с возникающими при вращении кориолисовыми силами.