Если жидкость находится не только в механическом, но и в полном термодинамическом равновесии, то ее температура постоянна и можно написать:

$$\frac{ds}{dz}=\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dz}=-\rho g\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T.$$

Наконец, воспользовавшись известными термодинамическими соотношениями

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p,\quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p=\frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$$

(c_p — теплоемкость единицы массы жидкости), получим:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{T}{c_p}\frac{g}{\rho}\left|\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\right|}. \tag{13,7}$$

В частности, для термодинамически идеального газа эта формула дает

$$\omega_0=\frac{g}{\sqrt{c_pT}}. \tag{13,8}$$

Зависимость частоты от направления волнового вектора приводит к тому, что скорость распространения волны $\mathbf{U}=\partial\omega/\partial\mathbf{k}$ не совпадает по направлению с $\mathbf{k}$. Представив зависимость $\omega(\mathbf{k})$ в виде

$$\omega=\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}}{k}\right)^2}$$

($\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении вертикально вверх) и произведя дифференцирование, получим

$$\mathbf{U}=-\frac{\omega_0^2}{\omega k}(\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})\{\boldsymbol{\nu}-(\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})\mathbf{n}\}, \tag{13,9}$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{k}/k$. Эта скорость перпендикулярна к вектору $\mathbf{k}$, а по величине равна

$$U=\frac{\omega_0}{k}\cos\theta.$$

Ее проекция на вертикаль:

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\nu}=-\frac{\omega_0}{k}\cos\theta\sin\theta.$$

§ 14. Волны во вращающейся жидкости

Другой своеобразный тип внутренних волн может распространяться в равномерно вращающейся как целое несжимаемой жидкости. Их происхождение связано с возникающими при вращении кориолисовыми силами.

Будем рассматривать жидкость в системе координат, вращающейся вместе с ней. Как известно, при таком описании в механические уравнения движения должны быть введены дополнительные силы — центробежная и кориолисова. Соответственно этому, надо добавить такие же силы (отнесенные к единичной массе жидкости) в правую сторону уравнения Эйлера. Центробежная сила может быть представлена в виде градиента $\nabla[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2/2$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения жидкости. Этот член можно объединить с силой $-\nabla p/\rho$, введя эффективное давление

$$P = p - \frac{\rho}{2}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2. \tag{14,1}$$

Кориолисова же сила равна $2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]$, она появляется лишь при движении жидкости относительно вращающейся системы координат ($\mathbf{v}$ — скорость в этой системе). Перенеся этот член в левую сторону уравнения Эйлера, напишем его в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + 2[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{14,2}$$

Уравнение же непрерывности сохраняет свой прежний вид, сводясь для несжимаемой жидкости к равенству $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Снова будем считать амплитуду волны малой и пренебрежем квадратичным по скорости членом в уравнении (14,2), которое примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla p', \tag{14,3}$$

где p' — переменная часть давления в волне, а $\rho = \mathrm{const}$. Сразу же исключим давление, применив к обеим сторонам уравнения (14,3) операцию rot. Правая сторона уравнения обращается в нуль, а в левой имеем, с учетом несжимаемости жидкости:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}] = \boldsymbol{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{v} - (\boldsymbol{\Omega}\nabla)\mathbf{v} = -(\boldsymbol{\Omega}\nabla)\mathbf{v}.$$

Выбрав направление $\boldsymbol{\Omega}$ в качестве оси z, запишем получающееся уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\Omega\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \tag{14,4}$$

Ищем решение в виде плоской волны

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{14,5}$$

удовлетворяющей (в силу уравнения $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) условию поперечности

$$\mathbf{kA} = 0. \tag{14,6}$$

Подстановка (14,5) в уравнение (14,4) дает

$$\omega[\mathbf{kv}] = 2i\Omega k_z \mathbf{v}. \tag{14,7}$$

Закон дисперсии волн получается исключением $\mathbf{v}$ из этого векторного равенства. Умножив его с обеих сторон векторно на $\mathbf{k}$, переписываем его в виде

$$-\omega k^2 \mathbf{v} = 2i\Omega k_z [\mathbf{kv}]$$

и, сравнив друг с другом оба равенства, находим искомую зависимость ω от $\mathbf{k}$:

$$\omega = 2\Omega \frac{k_z}{k} = 2\Omega \cos\theta, \tag{14,8}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{\Omega}$.

С учетом (14,4) равенство (14,7) принимает вид

$$[\mathbf{nv}] = i\mathbf{v},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Если представить комплексную амплитуду волны как $\mathbf{A} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ с вещественными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то отсюда следует, что $[\mathbf{nb}] = \mathbf{a}$, — векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (оба лежащие в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}$) взаимно перпендикулярны и одинаковы по величине. Выбрав их направления в качестве осей x и y и отделив в (14,5) вещественную и мнимую части, найдем, что

$$v_x = a\cos(\omega t - \mathbf{kr}), \quad v_y = -a\sin(\omega t - \mathbf{kr}).$$

Таким образом, волна обладает круговой поляризацией: в каждой точке пространства вектор $\mathbf{v}$ вращается со временем, оставаясь постоянным по величине[1]).

Скорость распространения волны:

$$\mathbf{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{2\Omega}{k}\{\boldsymbol{\nu} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})\}, \tag{14,9}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{\Omega}$; как и в гравитационных внутренних волнах, эта скорость перпендикулярна волновому вектору. Ее абсолютная величина и проекция на направление $\mathbf{\Omega}$:

$$U = \frac{2\Omega}{k}\sin\theta, \quad \mathbf{U}\boldsymbol{\nu} = \frac{2\Omega}{k}\sin^2\theta = U\sin\theta.$$

Рассмотренные волны называют *инерционными*. Поскольку кориолисовы силы не совершают работы над движущейся жидкостью, заключенная в этих волнах энергия — целиком кинетическая.

---

[1]) Напомним, что речь идет о движении по отношению к вращающейся системе координат! По отношению к неподвижной системе на это движение налагается еще и вращение всей жидкости как целого.

Особый вид инерционных осесимметричных (не плоских) волн может распространяться вдоль оси вращения жидкости — см. задачу.

В заключение сделаем еще одно замечание, относящееся к стационарным движениям во вращающейся жидкости, а не к распространению волн в ней.

Пусть l — характерный параметр длины такого движения, а u — характерная скорость. По порядку величины член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении (14,2) равен u^2/l, а член $2[\mathbf{\Omega v}] \sim \Omega u$. Если $u/l\Omega \ll 1$, то первым можно пренебречь по сравнению со вторым и тогда уравнение стационарного движения сводится к

$$2[\mathbf{\Omega v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{14,10}$$

или

$$2\Omega v_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, \quad 2\Omega v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

где x, y — декартовы координаты в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Отсюда видно, что P, а потому и v_x, v_y, не зависят от продольной координаты z. Далее, исключив P из двух первых уравнений, получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

после чего из уравнения непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ следует, что $\partial v_z/\partial z = 0$. Таким образом, стационарное движение (относительно вращающейся системы координат) в быстро вращающейся жидкости представляет собой наложение двух независимых движений: плоского течения в поперечной плоскости и осевого движения, не зависящего от координаты z (*J. Proudman*, 1916).

Задачи

1. Определить движение в осесимметричной волне, распространяющейся вдоль оси вращающейся как целое несжимаемой жидкости (*W. Thomson*, 1880).

Решение. Введем цилиндрические координаты r, φ, z с осью z вдоль вектора $\mathbf{\Omega}$. В осесимметричной волне все величины не зависят от угловой переменной φ. Зависимость же от времени и координаты z дается множителем вида $\exp\{i(kz - \omega t)\}$. Раскрыв уравнение (14,3) в компонентах, получим

$$-i\omega v_r - 2\Omega v_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r}, \tag{1}$$

$$-i\omega v_\varphi + 2\Omega v_r = 0, \quad -i\omega v_z = -\frac{ik}{\rho}p'. \tag{2}$$

Сюда надо присоединить уравнение непрерывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + ikv_z = 0. \tag{3}$$

Выразив v_φ и p' через v_r из (2) и (3) и подставив в (1), получим уравнение

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}+\left[\frac{4\Omega^2k^2}{\omega^2}-k^2-\frac{1}{r^2}\right]F=0 \tag{4}$$

для функции $F(r)$, определяющей радиальную зависимость скорости v_r:

$$v_r=F(r)\,e^{i(\omega t-kz)}.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $r=0$, есть

$$F=\text{const}\cdot J_1\left(kr\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\right), \tag{5}$$

где J_1 — функция Бесселя порядка 1.

Вся картина движения в волне распадается на области, ограниченные коаксиальными цилиндрическими поверхностями с радиусами r_n, определяемыми равенствами

$$kr_n\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}=x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — последовательные нули функции $J_1(x)$. На этих поверхностях $v_r=0$; другими словами, жидкость никогда не пересекает их.

Отметим, что для рассматриваемых волн в неограниченной жидкости частота ω не зависит от k. Возможные значения частоты ограничены, однако, условием $\omega<2\Omega$; в противном случае уравнение (4) не имеет решения, удовлетворяющего необходимым условиям конечности.

Если же вращающаяся жидкость ограничена цилиндрической стенкой (радиуса R), то должно быть учтено условие $v_r=0$ на стенке. Отсюда возникает соотношение

$$ka\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}=x_n,$$

устанавливающее связь между ω и k для волны с заданным значением n (т. е. числом коаксиальных областей в ней).

2. Получить уравнение, описывающее произвольное малое возмущение давления во вращающейся жидкости.

Решение. Уравнение (14,3), расписанное в компонентах, дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}-2\Omega v_y=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x},\quad \frac{\partial v_y}{\partial t}+2\Omega v_x=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x},\quad \frac{\partial v_z}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}. \tag{1}$$

Продифференцировав эти три уравнения соответственно по x, y, z и сложив их с учетом уравнения $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$, получим:

$$\frac{1}{\rho}\Delta p'=2\Omega\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Дифференцирование этого уравнения по t, снова с учетом уравнений (1), дает

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\Delta p'=4\Omega^2\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

а еще одно дифференцирование по t приводит к окончательному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta p' + 4\Omega^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

Для периодических возмущений с частотой ω это уравнение сводится к

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Для волн вида (14,5) отсюда получается, разумеется, уже известное дисперсионное соотношение (14,8); при этом $\omega < 2\Omega$ и коэффициент при $\partial^2 p'/\partial z^2$ в уравнении (3) отрицателен. Возмущения из точечного источника распространяются вдоль образующих конуса с осью вдоль Ω и углом раствора 2θ, где $\sin\theta = \omega/2\Omega$.

При $\omega > 2\Omega$ коэффициент при $\partial^2 p'/\partial z^2$ в уравнении (3) положителен, и путем очевидного изменения масштаба вдоль оси z оно приводится к уравнению Лапласа. Влияние точечного источника возмущений простирается в этом случае по всему объему жидкости, причем убывает при удалении от источника по степенному закону