ГЛАВА II

ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 15. Уравнения движения вязкой жидкости

Мы переходим теперь к изучению влияния, которое оказывают на движение жидкости происходящие при движении процессы диссипации энергии. Эти процессы являются выражением всегда имеющей место в той или иной степени термодинамической необратимости движения, связанной с наличием внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности.

Для того чтобы получить уравнения, описывающие движение вязкой жидкости, необходимо ввести дополнительные члены в уравнение движения идеальной жидкости. Что касается уравнения непрерывности, то, как явствует из самого его вывода, оно относится в равной мере к движению всякой жидкости, в том числе и вязкой. Уравнение же Эйлера должно быть изменено.

Мы видели в § 7, что уравнение Эйлера может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса. Поток импульса, определяемый формулой (7,2), представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный просто с механическим передвижением различных участков жидкости из одного места в другое и с действующими в жидкости силами давления. Вязкость (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии еще дополнительного, необратимого, переноса импульса из мест с большей в места с меньшей скоростью.

Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к «идеальному» потоку импульса (7,2) дополнительный член σ'_{ik}, определяющий необратимый, «вязкий», перенос импульса в жидкости. Таким образом, мы будем писать тензор плотности потока импульса в вязкой жидкости в виде

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \qquad (15,1)$$

Тензор

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \qquad (15,2)$$

называют *тензором напряжений*, а σ'_{ik} — *вязким тензором напряжений*. σ_{ik} определяет ту часть потока импульса, которая не связана с непосредственным переносом импульса вместе с массой передвигающейся жидкости [1]).

Установить общий вид тензора σ'_{ik} можно, исходя из следующих соображений. Процессы внутреннего трения в жидкости возникают только в тех случаях, когда различные участки жидкости движутся с различной скоростью, так что имеет место движение частей жидкости друг относительно друга. Поэтому σ'_{ik} должно зависеть от производных от скорости по координатам. Если градиенты скорости не очень велики, то можно считать, что обусловленный вязкостью перенос импульса зависит только от первых производных скорости. Самую зависимость σ'_{ik} от производных $\partial v_i/\partial x_k$ можно в том же приближении считать линейной. Не зависящие от $\partial v_i/\partial x_k$ члены должны отсутствовать в выражении для σ'_{ik}, поскольку σ'_{ik} должны обратиться в нуль при $\mathbf{v} = \mathrm{const}$. Далее замечаем, что σ'_{ik} должно обращаться в нуль также и в том случае, когда вся жидкость как целое совершает равномерное вращение, поскольку ясно, что при таком движении никакого внутреннего трения в жидкости не происходит. При равномерном вращении с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ скорость $\mathbf{v}$ равна векторному произведению $[\mathbf{\Omega r}]$. Линейными комбинациями производных $\partial v_i/\partial x_k$, обращающимися в нуль при $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$, являются суммы

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Поэтому σ'_{ik} должно содержать именно эти симметричные комбинации производных $\partial v_i/\partial x_k$.

Наиболее общим видом тензора второго ранга, удовлетворяющего этим условиям, является

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \qquad (15,3)$$

с независящими от скорости коэффициентами η и ζ; в этом утверждении использована изотропия жидкости, вследствии которой ее свойства как таковой могут характеризоваться лишь скалярными величинами (в данном случае — η и ζ). Члены в (15,3) сгруппированы таким образом, что выражение в скобках дает нуль при свертывании (т. е. при суммировании компонент с $i = k$). Величины η и ζ называют *коэффициентами вязкости* (причем ζ часто называют *второй вязкостью*). Как будет

---

[1]) Мы увидим ниже, что σ'_{ik} содержит член, пропорциональный δ_{ik}, т. е. член такого же вида, как и $p\delta_{ik}$. Поэтому, строго говоря, после такого видоизменения формы тензора потока импульса должно быть уточнено, что именно подразумевается под давлением p. См. об этом конец § 49.

показано в §§ 16, 49, оба они положительны:

$$\eta > 0, \ \zeta > 0. \tag{15,4}$$

Уравнения движения вязкой жидкости можно теперь получить непосредственно путем прибавления выражения $\dfrac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}$ к правой стороне уравнения Эйлера

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Таким образом, получаем:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right). \tag{15,5}$$

Это есть наиболее общий вид уравнений движения вязкой жидкости. Величины η, ζ являются, вообще говоря, функциями давления и температуры. В общем случае p, T, а потому и η, ζ, не постоянны вдоль всей жидкости, так что η и ζ не могут быть вынесены из-под знака производной.

В большинстве случаев, однако, изменение коэффициентов вязкости вдоль жидкости незначительно, и потому можно считать их постоянными. Тогда уравнения (15,5) можно представить в векторном виде:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{15,6}$$

Это — так называемое *уравнение Навье — Стокса*.

Оно существенно упрощается, если жидкость можно считать несжимаемой. Тогда $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и последний член справа в (15,6) исчезает. Рассматривая вязкую жидкость, мы фактически всегда будем считать ее несжимаемой и соответственно этому пользоваться уравнением движения в виде[1])

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}. \tag{15,7}$$

Тензор напряжений в несжимаемой жидкости тоже принимает простой вид:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{15,8}$$

---

[1]) Уравнение (15,7) было впервые сформулировано на основе модельных представлений *Навье* (*C. L. Navier*, 1827). Вывод уравнений (15,6—7) (без члена с ζ), близкий к современному, был дан *Стоксом* (*G. G. Stokes*, 1845).

Мы видим, что в несжимаемой жидкости вязкость описывается всего одним коэффициентом. Поскольку практически жидкость можно очень часто считать несжимаемой, обычно играет роль именно этот коэффициент вязкости η. Отношение

$$\nu = \eta/\rho \tag{15,9}$$

называют *кинематической вязкостью* (а о самой η говорят тогда как о *динамической вязкости*). Приведем значения величин η и ν для некоторых жидкостей и газов (при температуре 20° C) в абсолютных единицах:

	η, г/с · см	ν, см²/с
Вода	0,010	0,010
Воздух	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	0,150
Спирт	0,018	0,022
Глицерин . . .	8,5	6,8
Ртуть	0,0156	0,0012

Упомянем, что динамическая вязкость газов при заданной температуре не зависит от давления. Кинематическая же вязкость соответственно обратно пропорциональна давлению.

Из уравнения (15,7) можно исключить давление таким же образом, как это было сделано раньше с уравнением Эйлера. Применив к обеим сторонам уравнения операцию rot, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}] + \nu\Delta\operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

(ср. уравнение (2,11) для идеальной жидкости). Поскольку здесь идет речь о несжимаемой жидкости, этому уравнению можно придать другой вид, раскрыв первый член в его правой части по правилам векторного анализа и учтя равенство $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\operatorname{rot}\mathbf{v} - (\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \nu\Delta\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{15,10}$$

По известному распределению скоростей, распределение давления в жидкости может быть найдено путем решения уравнения типа уравнения Пуассона:

$$\Delta p = -\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -\rho\frac{\partial^2 v_i v_k}{\partial x_k \partial x_i}; \tag{15,11}$$

оно получается применением к уравнению (15,7) операции div.

Приведем здесь также уравнение, которому удовлетворяет функция тока $\psi(x, y)$ при двухмерном течении несжимаемой вязкой жидкости. Оно получается подстановкой (10,9) в уравнение (15,10):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\psi = 0. \tag{15,12}$$

Необходимо написать еще граничное условие к уравнениям движения вязкой жидкости. Между поверхностью твердого тела и всякой вязкой жидкостью всегда существуют силы молекулярного сцепления, приводящие к тому, что прилегающий к твердой стенке слой жидкости полностью задерживается, как бы прилипая к ней. Соответственно этому граничное условие к уравнениям движения вязкой жидкости состоит в требовании обращения в нуль скорости жидкости на неподвижных твердых поверхностях:

$$\mathbf{v} = 0. \tag{15,13}$$

Подчеркнем, что здесь требуется исчезновение как нормальной, так и тангенциальной компонент скорости, между тем как граничные условия к уравнениям идеальной жидкости требуют обращения в нуль только v_n [1]).

В общем случае движущейся поверхности скорость $\mathbf{v}$ должна быть равна скорости этой поверхности.

Легко написать выражение для силы, действующей на соприкасающуюся с жидкостью твердую поверхность. Сила, действующая на некоторый элемент поверхности, есть не что иное, как поток импульса через этот элемент. Поток импульса через элемент поверхности $d\mathbf{f}$ есть

$$\Pi_{ik}\, df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik})\, df_k.$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k df$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, и помня, что на твердой поверхности $\mathbf{v} = 0$ [2]), находим, что сила $\mathbf{P}$, действующая на единицу площади поверхности, равна

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k. \tag{15,14}$$

Первый член есть обычное давление жидкости, а второй представляет собой действующую на поверхность силу трения, обусловленную вязкостью. Подчеркнем, что $\mathbf{n}$ в (15.14) есть единичный вектор нормали, внешней по отношению к поверхности жидкости, т. е. внутренней по отношению к твердой поверхности.

Если мы имеем границу раздела двух несмешивающихся жидкостей (или жидкости и газа), то условия на этой поверхности гласят, что скорости обеих жидкостей должны быть равны и силы, с которыми они действуют друг на друга, должны быть

---

[1]) Отметим, что решениями уравнения Эйлера нельзя удовлетворить лишнему (по сравнению со случаем идеальной жидкости) граничному условию обращения в нуль тангенциальной скорости. Математически это связано с более низким (первым) порядком этого уравнения по координатным производным, чем порядок (второй) уравнения Навье — Стокса.

[2]) При определении действующей на поверхность силы надо рассматривать данный элемент поверхности в системе отсчета, в которой он покоится. Сила равна просто потоку импульса только при неподвижной поверхности.

одинаковы по величине и противоположны по направлению. Второе из этих условий записывается в виде

$$n_k^{(1)}\sigma_{ik}^{(1)} + n_k^{(2)}\sigma_{ik}^{(2)} = 0,$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум жидкостям. Векторы нормали $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ имеют взаимно противоположные направления, $\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)} \equiv \mathbf{n}$, так что можно написать:

$$n_i\sigma_{ik}^{(1)} = n_i\sigma_{ik}^{(2)}. \qquad (15{,}15)$$

На свободной поверхности жидкости должно выполняться условие

$$\sigma_{ik}n_k \equiv \sigma'_{ik}n_k - pn_i = 0. \qquad (15{,}16)$$

Уравнения движения в криволинейных координатах

Приведем для справок уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в часто используемых криволинейных координатах.

В цилиндрических координатах r, φ, z компоненты тензора напряжений выглядят следующим образом:

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \sigma_{r\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\right), \quad \sigma_{\varphi z} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right), \qquad (15{,}17)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \sigma_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right).$$

Три компоненты уравнения Навье — Стокса принимают вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right),$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right), \qquad (15{,}18)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z,$$

причем операторы $(\mathbf{v}\nabla)$ и Δ определяются формулами

$$(\mathbf{v}\nabla) f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (15{,}19)$$

В сферических координатах r, φ, θ имеем для тензора напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right),\\
\sigma_{r\theta} &= \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\theta\varphi} &= \eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} - \frac{v_\varphi\operatorname{ctg}\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\varphi r} &= \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r}\right).
\end{aligned} \tag{15,20}$$

Уравнения Навье — Стокса:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} =\\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right],\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta}{r} =\\
&\quad = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left[\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right],\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi\operatorname{ctg}\theta}{r} =\\
&\quad = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left[\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right],
\end{aligned} \tag{15,21}$$

причем

$$(\mathbf{v}\nabla)\,f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi},$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} = 0. \tag{15,22}$$