§ 16. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости

Наличие вязкости приводит к диссипации энергии, переходящей в конце концов в тепло. Вычисление диссипируемой энергии в особенности просто для несжимаемой жидкости.

Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{\rho}{2}\int v^2\,dV.$$

Вычислим производную от этой энергии по времени. Для этого пишем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

и подставляем для производной $\partial v_i/\partial t$ ее выражение согласно уравнению Навье — Стокса:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

В результате получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla p + v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} =$$

$$= -\rho(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \operatorname{div}(\mathbf{v}\sigma') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Здесь посредством $(\mathbf{v}\sigma')$ обозначен вектор с компонентами $v_i\sigma'_{ik}$. Замечая, что в несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, можно написать первый член справа в виде дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\sigma')\right] - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \qquad (16,1)$$

Выражение, стоящее под знаком div, представляет собой не что иное, как плотность потока энергии в жидкости. Первый член в квадратных скобках есть поток энергии, связанный с простым переносом массы жидкости при ее движении, совпадающий с потоком энергии в идеальной жидкости (см. (10,5)). Второй же член $(\mathbf{v}\sigma')$ есть поток энергии, связанный с процессами внутреннего трения. Действительно, наличие вязкости приводит к появлению потока импульса σ'_{ik}; перенос же импульса всегда связан с переносом энергии, причем поток энергии получается, очевидно, из потока импульса умножением на скорость.

Если проинтегрировать (16,1) по некоторому объему V, то получится:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho v^2}{2}\,dV = -\oint\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\sigma')\right]d\mathbf{f} - \int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,dV. \qquad (16,2)$$

Первый член справа определяет изменение кинетической энергии жидкости в объеме V благодаря наличию потока энергии через поверхность этого объема. Второй же член (взятый с обратным знаком) представляет собой, следовательно, уменьшение кинетической энергии в единицу времени, обусловленное диссипацией.

Если распространить интегрирование по всему объему жидкости, то интеграл по поверхности исчезает (на бесконечности скорость обращается в нуль[1])), и мы получим диссипируемую в единицу времени во всей жидкости энергию в виде

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = -\frac{1}{2}\int \sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) dV$$

(последнее равенство следует из симметричности тензора σ'_{ik}). В несжимаемой жидкости тензор σ'_{ik} определяется выражением (15,8). Таким образом, находим окончательно следующую формулу для диссипации энергии в несжимаемой жидкости:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\frac{\eta}{2}\int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV. \qquad (16,3)$$

Диссипация приводит к уменьшению механической энергии, т. е. должно быть $\dot{E}_{\text{кин}} < 0$. С другой стороны, интеграл в (16,3) является величиной всегда положительной. Поэтому мы можем заключить, что коэффициент вязкости η положителен.

Задача

Для потеницального движения преобразовать интеграл (16,3) в интеграл по поверхности, ограничивающей область движения.

Решение. Положив $\partial v_i/\partial x_k = \partial v_k/\partial x_i$ и произведя однократное интегрирование по частям, получим:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -2\eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2 dV = -2\eta \int v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} df_k,$$

или

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\eta \int \nabla v^2 \, d\mathbf{f}.$$

§ 17. Течение по трубе

Рассмотрим несколько простейших случаев движения вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями, движущимися друг относительно друга с постоян-

[1]) Мы рассматриваем движение жидкости в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится.

Здесь и в аналогичных других местах мы для определенности говорим о бесконечном объеме жидкости, что отнюдь не означает какого-либо ограничения общности. Так, для жидкости, заключенной в ограниченном твердыми стенками объеме, интеграл по поверхности этого объема все равно обратился бы в нуль в силу условия равенства нулю скорости на стенке.