Первый член справа определяет изменение кинетической энергии жидкости в объеме V благодаря наличию потока энергии через поверхность этого объема. Второй же член (взятый с обратным знаком) представляет собой, следовательно, уменьшение кинетической энергии в единицу времени, обусловленное диссипацией.

Если распространить интегрирование по всему объему жидкости, то интеграл по поверхности исчезает (на бесконечности скорость обращается в нуль[1])), и мы получим диссипируемую в единицу времени во всей жидкости энергию в виде

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = -\frac{1}{2}\int \sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) dV$$

(последнее равенство следует из симметричности тензора σ'_{ik}). В несжимаемой жидкости тензор σ'_{ik} определяется выражением (15,8). Таким образом, находим окончательно следующую формулу для диссипации энергии в несжимаемой жидкости:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\frac{\eta}{2}\int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV. \qquad (16,3)$$

Диссипация приводит к уменьшению механической энергии, т. е. должно быть $\dot{E}_{\text{кин}} < 0$. С другой стороны, интеграл в (16,3) является величиной всегда положительной. Поэтому мы можем заключить, что коэффициент вязкости η положителен.

Задача

Для потеницального движения преобразовать интеграл (16,3) в интеграл по поверхности, ограничивающей область движения.

Решение. Положив $\partial v_i/\partial x_k = \partial v_k/\partial x_i$ и произведя однократное интегрирование по частям, получим:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -2\eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2 dV = -2\eta \int v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} df_k,$$

или

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\eta \int \nabla v^2 \, d\mathbf{f}.$$

§ 17. Течение по трубе

Рассмотрим несколько простейших случаев движения вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями, движущимися друг относительно друга с постоян-

[1]) Мы рассматриваем движение жидкости в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится.

Здесь и в аналогичных других местах мы для определенности говорим о бесконечном объеме жидкости, что отнюдь не означает какого-либо ограничения общности. Так, для жидкости, заключенной в ограниченном твердыми стенками объеме, интеграл по поверхности этого объема все равно обратился бы в нуль в силу условия равенства нулю скорости на стенке.

ной скоростью u. Плоскость x, z выберем в одной из них, причем ось x направим по направлению скорости $\mathbf{u}$. Все величины зависят, очевидно, только от координаты y, а скорость жидкости направлена везде по оси x. Из (15,7) имеем для стационарного движения

$$\frac{dp}{dy}=0, \qquad \frac{d^2v}{dy^2}=0.$$

(Уравнение же непрерывности удовлетворяется тождественно.) Отсюда $p=\mathrm{const}$, $v=ay+b$. При $y=0$ и при $y=h$ (h — расстояние между плоскостями) должно быть соответственно $v=0$ и $v=u$. Отсюда находим:

$$v=\frac{y}{h}u. \tag{17,1}$$

Таким образом, распределение скоростей в жидкости линейно. Средняя скорость жидкости

$$\bar{v}=\frac{1}{h}\int\limits_0^h v\,dy=\frac{u}{2}. \tag{17,2}$$

Из (15,14) находим, что нормальная компонента действующей на плоскости силы равна, как и должно было быть, просто p, а тангенциальная сила трения (на плоскости $y=0$) равна

$$\sigma_{xy}=\eta\frac{dv}{dy}=\frac{\eta u}{h} \tag{17,3}$$

(на плоскости $y=h$ она имеет обратный знак).

Далее, рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями при наличии градиента давления. Координаты выбираем, как в предыдущем случае; ось x направлена по направлению движения жидкости. Уравнения Навье — Стокса дают (скорость зависит, очевидно, только от координаты y):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

Второе из этих уравнений показывает, что давление не зависит от y, т. е. постоянно вдоль толщины слоя жидкости между плоскостями. Тогда в первом уравнении справа стоит функция только от x, а слева — только от y; такое уравнение может выполняться, только если его левая и правая части являются постоянными величинами. Таким образом,

$$\frac{dp}{dx}=\mathrm{const},$$

т. е. давление является линейной функцией координаты x вдоль направления потока жидкости. Для скорости же получаем теперь

$$v=\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y^2+ay+b.$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий $v=0$ при $y=0$ и $y=h$. В результате получаем:

$$v=-\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y(y-h). \tag{17,4}$$

Таким образом, скорость меняется вдоль толщины слоя жидкости по параболическому закону, достигая наибольшей величины посредине слоя. Для среднего по толщине слоя жидкости значения ее скорости вычисление дает

$$\bar{v}=-\frac{h^2}{12\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{17,5}$$

Сила трения, действующая на неподвижную стенку:

$$\sigma_{xy}=\eta\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0}=-\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}. \tag{17,6}$$

Наконец, рассмотрим стационарное течение жидкости по трубе произвольного сечения (одинакового вдоль всей длины трубы). Ось трубы выберем в качестве оси x. Очевидно, что скорость v жидкости направлена везде по оси x и является функцией только от y и z. Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно, а y- и z-компоненты уравнения Навье — Стокса дают опять $\partial p/\partial y=\partial p/\partial z=0$, т. е. давление постоянно вдоль сечения трубы. x-компонента уравнения (15,7) дает

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{17,7}$$

Отсюда опять заключаем, что $\frac{dp}{dx}=\text{const}$; градиент давления можно поэтому написать в виде $\Delta p/l$, где Δp — разность давлений на концах трубы, а l — ее длина.

Таким образом, распределение скоростей в потоке жидкости в трубе определяется двухмерным уравнением типа $\Delta v=\text{const}$. Это уравнение должно быть решено при граничном условии $v=0$ на контуре сечения трубы. Решим это уравнение для трубы кругового сечения. Выбирая начало координат в центре кругового сечения и вводя полярные координаты, имеем в силу симметрии $v=v(r)$. Воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в полярных координатах, имеем:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{\Delta p}{\eta l}.$$

Интегрируя, находим:

$$v=-\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2+a\ln r+b. \tag{17,8}$$

Постоянную a надо положить равной нулю, поскольку скорость должна оставаться конечной во всем сечении трубы, включая его центр. Постояннную b определяем из требования $v=0$ при $r=R$ (R — радиус трубы) и получаем:

$$v=\frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2-r^2). \qquad (17,9)$$

Таким образом, скорость распределена по сечению трубы по параболическому закону.

Легко определить количество (массу) жидкости Q, протекающей в 1 сек. через поперечное сечение трубы (или, как говорят, расход жидкости в трубе). Через кольцевой элемент $2\pi r\,dr$ площади сечения трубы проходит в 1 с количество жидкости $\rho\cdot 2\pi rv\,dr$. Поэтому

$$Q=2\pi\rho\int_0^R rv\,dr.$$

С помощью (17,9) получаем:

$$Q=\frac{\pi\,\Delta p}{8\nu l}R^4. \qquad (17,10)$$

Количество протекающей жидкости пропорционально четвертой степени радиуса трубы [1]).

Задачи

1. Определить течение жидкости по трубе с кольцевым сечением (внутренний и внешний радиусы трубы R_1 и R_2).

Решение. Определяя постоянные a и b в общем решении (17,8) из условий $v=0$ при $r=R_1$ и $r=R_2$, находим:

$$v=\frac{\Delta p}{4\eta l}\left\{R_2^2-r^2+\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\ln\frac{r}{R_2}\right\}.$$

Количество протекающей жидкости равно

$$Q=\frac{\pi\,\Delta p}{8\nu l}\left\{R_2^4-R_1^4-\frac{\left(R_2^2-R_1^2\right)^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right\}.$$

2. То же для трубы эллиптического сечения.

Решение. Ищем решение уравнения (17,7) в виде $v=Ay^2+Bz^2+C$. Постоянные A, B, C определяем из требования, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению и граничному условию $v=0$ на контуре сечения (т. е. уравнение $Ay^2+Bz^2+C=0$ должно совпадать с уравнением контура

[1]) Выражаемая этой формулой зависимость Q от Δp и R была установлена эмпирически *Гагеном* (*G. Hagen*, 1839) и *Пуазейлем* (*J. L. M. Poiseuille*, 1840) и объяснена теоретически *Стоксом* (*G. G. Stokes*, 1845).

В литературе параллельные течения вязкой жидкости между неподвижными стенками часто называют просто *пуазейлевыми*; в случае (17,4) говорят о плоском пуазейлевом течении.

$y^2/a^2+z^2/b^2=1$, где a, b — полуоси эллипса). В результате получаем

$$v=\frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right).$$

Для количества протекающей жидкости получаем:

$$Q=\frac{\pi\,\Delta p}{4\nu l}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

3. То же для трубы с сечением в виде равностороннего треугольника (сторона треугольника a).

Решение. Обращающееся в нуль на треугольном контуре решение уравнения (17,7) есть

$$v=\frac{\Delta p}{l}\frac{2}{\sqrt{3}\,a\eta}h_1h_2h_3,$$

где h_1, h_2, h_3 — длины трех высот, опущенных из данной точки треугольника на три его стороны. Действительно, каждое из выражений Δh_1, Δh_2, Δh_3 (где $\Delta=\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$) равно нулю; это видно хотя бы из того, что каждую из высот h_1, h_2, h_3 можно выбрать в качестве одной из координат y или z, а при применении оператора Лапласа к координате получается нуль. Поэтому имеем:

$$\Delta h_1h_2h_3=2\,(h_1\nabla h_2\nabla h_3+h_2\nabla h_1\nabla h_3+h_3\nabla h_1\nabla h_2).$$

Но $\nabla h_1=\mathbf{n}_1$, $\nabla h_2=\mathbf{n}_2$, $\nabla h_3=\mathbf{n}_3$, где $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — единичные векторы вдоль направлений высот h_1, h_2, h_3. Каждые два из $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ образуют друг с другом угол $2\pi/3$, так что

$$\nabla h_1\nabla h_2=\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

и т. д., и мы получаем соотношение

$$\Delta h_1h_2h_3=-(h_1+h_2+h_3)=-\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

с помощью которого убеждаемся в выполнении уравнения (17,7). Количество протекающей жидкости равно

$$Q=\frac{\sqrt{3}\,a^4\,\Delta p}{320\,\nu l}.$$

4. Цилиндр радиуса R_1 движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно своей оси; определить движение жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.

Решение. Выбираем цилиндрические координаты с осью z по оси цилиндра. Скорость направлена везде вдоль оси z и зависит (как и давление) только от r:

$$v_z=v(r).$$

Для v получаем уравнение

$$\Delta v=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=0$$

(член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=v\,\partial\mathbf{v}/\partial z$ исчезает тождественно). Используя граничные условия $v=u$ при $r=R_1$ и $v=0$ при $r=R_2$, получаем:

$$v=u\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}.$$

Сила трения, действующая на единицу длины каждого из цилиндров, равна $2\pi\eta u/\ln(R_2/R_1)$.

5. Слой жидкости (толщины h) ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу неподвижной плоскостью, наклоненной под углом α к горизонту. Определить движение жидкости, возникающее под влиянием поля тяжести.

Решение. Выбираем неподвижную нижнюю плоскость в качестве плоскости x, y, ось x направлена по направлению течения жидкости, а ось z — перпендикулярно к плоскости x, y (рис. 6). Ищем решение, зависящее только от координаты z. Уравнения Навье — Стокса с $v_x = v(z)$ при наличии поля тяжести гласят:

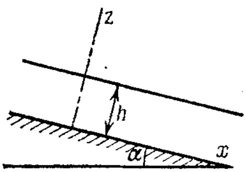

Рис. 6

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho g \sin\alpha = 0, \qquad \frac{dp}{dz} + \rho g \cos\alpha = 0.$$

На свободной поверхности ($z = h$) должны выполняться условия

$$\sigma_{zz} = -p = -p_0, \qquad \sigma_{xz} = \eta \frac{dv}{dz} = 0$$

(p_0 — атмосферное давление). При $z = 0$ должно быть $v = 0$. Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$p = p_0 + \rho g \cos\alpha \cdot (h - z), \qquad v = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} z\,(2h - z).$$

Количество жидкости, протекающее в единицу времени через поперечное сечение слоя (отнесенное к единице длины вдоль оси y):

$$Q = \rho \int_0^h v\,dz = \frac{\rho g h^3 \sin\alpha}{3\nu}.$$

6. Определить закон падения давления вдоль трубки кругового сечения, по которой происходит изотермическое течение вязкого идеального газа (иметь в виду, что динамическая вязкость η идеального газа не зависит от его давления).

Решение. В каждом небольшом участке трубки газ можно считать несжимаемым (если только градиент давления не слишком велик) и соответственно этому можно применить формулу (17,10), согласно которой

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q}{\pi\rho R^4}.$$

На больших расстояниях, однако, ρ будет меняться, и давление не будет линейной функцией от x. Согласно уравнению Клапейрона плотность газа $\rho = mp/T$ (m — масса молекулы), так что

$$-\frac{dp}{dx} = \left(\frac{8\eta Q T}{\pi m R^4}\right)\frac{1}{p}$$

(расход газа Q через все сечение трубки должен быть, очевидно, одинаковым вне зависимости от того, является ли газ несжимаемым или нет). Отсюда получаем:

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{16\eta Q T}{\pi m R^4} l$$

(p_2, p_1 — давления на концах участка трубки длины l).