§ 18. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами

Рассмотрим движение жидкости, заключенной между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2; радиусы цилиндров пусть будут R_1 и R_2, причем $R_2 > R_1$[1]). Выберем цилиндрические координаты r, z, φ с осью z по оси цилиндров. Из симметрии очевидно, что

$$v_z = v_r = 0, \quad v_\varphi = v(r); \quad p = p(r).$$

Уравнение Навье — Стокса в цилиндрических координатах дает в рассматриваемом случае два уравнения:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}, \tag{18,1}$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \tag{18,2}$$

Второе из этих уравнений имеет решения типа r^n; подстановка решения в таком виде дает $n = \pm 1$, так что

$$v = ar + \frac{b}{r}.$$

Постоянные a и b находятся из предельных условий, согласно которым скорость жидкости на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях должна быть равна скорости соответствующего цилиндра: $v = R_1\Omega_1$ при $r = R_1$, $v = R_2\Omega_2$ при $r = R_2$. В результате получаем распределение скоростей в виде

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \tag{18,3}$$

Распределение давления получается отсюда согласно (18,1) простым интегрированием.

При $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ получается просто $v = \Omega r$, т. е. жидкость вращается как целое вместе с цилиндрами. При отсутствии внешнего цилиндра ($\Omega_2 = 0$; $R_2 = \infty$) получается

$$v = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}.$$

Определим еще момент действующих на цилиндры сил трения. На единицу поверхности внутреннего цилиндра действует сила трения, направленная по касательной к поверхности и равная согласно (15,14) компоненте $\sigma'_{r\varphi}$ тензора напряжений.

[1]) В литературе движение между вращающимися цилиндрами часто называют *течением Куэтта* (*M. Couette*, 1890). В пределе $R_1 \to R_2$ оно переходит в течение (17,1) между движущимися параллельными плоскостями; о нем говорят как о плоском течении Куэтта.

С помощью формул (15,17) находим:

$$\sigma'_{r\varphi}\Big|_{r=R_1} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\Big|_{r=R_1} = -2\eta\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Момент этой силы получается отсюда умножением на R_1, а полный момент M_1, действующий на единицу длины цилиндра — умножением еще на $2\pi R_1$. Таким образом, находим:

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \qquad (18,4)$$

Момент сил, действующих на внешний цилиндр, $M_2 = -M_1$. При $\Omega_2 = 0$ и малом зазоре между цилиндрами ($\delta \equiv R_2 - R_1 \ll R_2$) формула (18,4) принимает вид

$$M_2 = \eta RSu/\delta, \qquad (18,5)$$

где $S \approx 2\pi R$ — площадь поверхности единицы длины цилиндра, а $u = \Omega_1 R$ — ее окружная скорость [1]).

По поводу полученных в этом и предыдущем параграфах решений уравнений движения вязкой жидкости можно сделать следующее общее замечание. Во всех этих случаях нелинейный член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ тождественно исчезает из уравнений, определяющих распределение скоростей, так что фактически приходится решать линейные уравнения, что крайне облегчает задачу. По этой же причине все эти решения тождественно удовлетворяют также и уравнениям движения идеальной несжимаемой жидкости, написанным, например, в виде (10,2—3). С этим связано то обстоятельство, что формулы (17,1) и (18,3) не содержат вовсе коэффициента вязкости жидкости. Коэффициент вязкости содержится только в таких формулах, как (17,9), которые связывают скорость с градиентом давления в жидкости, поскольку самое наличие градиента давления связано с вязкостью жидкости; идеальная жидкость могла бы течь по трубе и при отсутствии градиента давления.

§ 19. Закон подобия

При изучении движения вязких жидкостей можно получить ряд существенных результатов из простых соображений, связанных с размерностью различных физических величин. Рассмотрим какой-нибудь определенный тип движения. Этим типом может быть, например, движение тела определенной формы через жид-

[1]) Решение более сложной задачи о движении вязкой жидкости в узком зазоре между цилиндрами с параллельными, но эксцентрично расположенными осями, можно найти в книге: *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963, ч. 2, с. 534.