С помощью формул (15,17) находим:

$$\sigma'_{r\varphi}\big|_{r=R_1} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\bigg|_{r=R_1} = -2\eta\frac{(\Omega_1-\Omega_2)R_2^2}{R_2^2-R_1^2}.$$

Момент этой силы получается отсюда умножением на R_1, а полный момент M_1, действующий на единицу длины цилиндра — умножением еще на $2\pi R_1$. Таким образом, находим:

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta(\Omega_1-\Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}. \qquad (18,4)$$

Момент сил, действующих на внешний цилиндр, $M_2 = -M_1$. При $\Omega_2 = 0$ и малом зазоре между цилиндрами ($\delta \equiv R_2 - R_1 \ll R_2$) формула (18,4) принимает вид

$$M_2 = \eta RSu/\delta, \qquad (18,5)$$

где $S \approx 2\pi R$ — площадь поверхности единицы длины цилиндра, а $u = \Omega_1 R$ — ее окружная скорость[1]).

По поводу полученных в этом и предыдущем параграфах решений уравнений движения вязкой жидкости можно сделать следующее общее замечание. Во всех этих случаях нелинейный член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ тождественно исчезает из уравнений, определяющих распределение скоростей, так что фактически приходится решать линейные уравнения, что крайне облегчает задачу. По этой же причине все эти решения тождественно удовлетворяют также и уравнениям движения идеальной несжимаемой жидкости, написанным, например, в виде (10,2—3). С этим связано то обстоятельство, что формулы (17,1) и (18,3) не содержат вовсе коэффициента вязкости жидкости. Коэффициент вязкости содержится только в таких формулах, как (17,9), которые связывают скорость с градиентом давления в жидкости, поскольку самое наличие градиента давления связано с вязкостью жидкости; идеальная жидкость могла бы течь по трубе и при отсутствии градиента давления.

§ 19. Закон подобия

При изучении движения вязких жидкостей можно получить ряд существенных результатов из простых соображений, связанных с размерностью различных физических величин. Рассмотрим какой-нибудь определенный тип движения. Этим типом может быть, например, движение тела определенной формы через жид-

---

[1]) Решение более сложной задачи о движении вязкой жидкости в узком зазоре между цилиндрами с параллельными, но эксцентрично расположенными осями, можно найти в книге: *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963, ч. 2, с. 534.

кость. Если тело не является шаром, то должно быть также указано, в каком направлении оно движется, например, движение эллипсоида в направлении его большой оси или в направлении его малой оси и т. п. Далее, речь может идти о течении жидкости по области, ограниченной стенками определенной формы (по трубе определенного сечения и т. п.).

Телами одинаковой формы мы называем при этом тела геометрически подобные, т. е. такие, которые могут быть получены друг из друга изменением всех линейных размеров в одинаковое число раз. Поэтому если форма тела задана, то для полного определения размеров тела достаточно указать какой-нибудь один из его линейных размеров (радиус шара или цилиндрической трубы, одну из полуосей эллипсоида вращения с заданным эксцентриситетом и т. п.).

Мы будем рассматривать сейчас стационарные движения. Поэтому если речь идет, например, об обтекании твердого тела жидкостью (ниже мы говорим для определенности о таком случае), то скорость натекающего потока жидкости должна быть постоянной. Жидкость мы будем предполагать несжимаемой.

Из параметров, характеризующих самую жидкость, в гидродинамические уравнения (уравнение Навье — Стокса) входит только кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$; неизвестными же функциями, которые должны быть определены решением уравнений, являются при этом скорость $\mathbf{v}$ и отношение p/ρ давления p к постоянной ρ. Кроме того, течение жидкости зависит посредством граничных условий от формы и размеров движущегося в жидкости тела и от его скорости. Поскольку форма тела считается заданной, то его геометрические свойства определяются всего одним каким-нибудь линейным размером, который мы обозначим посредством l. Скорость же натекающего потока пусть будет u.

Таким образом, каждый тип движения жидкости определяется тремя параметрами: ν, u, l. Эти величины обладают размерностями:

$$[\nu] = \text{см}^2/\text{с}, \quad [l] = \text{см}, \quad [u] = \text{см}/\text{с}.$$

Легко убедиться в том, что из этих величин можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию, именно, lu/ν. Эту комбинацию называют *числом Рейнольдса* и обозначают посредством R:

$$\mathrm{R} = \frac{\rho u l}{\eta} = \frac{ul}{\nu}. \tag{19,1}$$

Всякий другой безразмерный параметр можно написать в виде функции от R.

Будем измерять длины в единицах l, а скорости — в единицах u, т. е. введем безразмерные величины $\mathbf{r}/l$, $\mathbf{v}/u$. Поскольку единственным безразмерным параметром является число Рейнольдса, то ясно, что получающееся в результате решения гидродинамических уравнений распределение скоростей определяется функциями вида

$$\mathbf{v} = u\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{R}\right). \qquad (19,2)$$

Из этого выражения видно, что в двух различных течениях одного и того же типа (например, обтекание шаров различного радиуса жидкостями различной вязкости) скорости $\mathbf{v}/u$ являются одинаковыми функциями отношения $\mathbf{r}/l$, если только числа Рейнольдса для этих течений одинаковы. Течения, которые могут быть получены друг из друга простым изменением масштаба измерения координат и скоростей, называются подобными. Таким образом, течения одинакового типа с одинаковым числом Рейнольдса подобны — так называемый *закон подобия* (*O. Reynolds*, 1883).

Аналогичную (19,2) формулу можно написать и для распределения давления в жидкости. Для этого надо составить из параметров ν, l, u какую-нибудь величину с размерностью давления, деленного на ρ; в качестве такой величины выберем, например, u^2. Тогда можно утверждать, что $p/\rho u^2$ будет функцией от безразмерной переменной $\mathbf{r}/l$ и безразмерного параметра R. Таким образом,

$$p = \rho u^2 f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{R}\right). \qquad (19,3)$$

Наконец, аналогичные соображения применимы к величинам, характеризующим течение жидкости, но не являющимся уже функциями координат. Таковой является, например, действующая на обтекаемое тело сила сопротивления F. Именно, можно утверждать, что безразмерное отношение F к составленной из ν, u, l, ρ величине размерности силы должно быть функцией только от числа Рейнольдса. В качестве указанной комбинации из ν, u, l, ρ можно взять, например, произведение $\rho u^2 l^2$. Тогда

$$F = \rho u^2 l^2 f(\mathrm{R}). \qquad (19,4)$$

Если влияние силы тяжести на движение существенно, то движение определяется не тремя, а четырьмя параметрами: l, u, ν и ускорением силы тяжести g. Из этих параметров можно составить уже не одну, а две независимые безразмерные комбинации. В качестве их можно, например, выбрать число Рейнольдса и *число Фруда*, равное

$$\mathrm{F} = u^2/lg. \qquad (19,5)$$

В формулах (19,2—4) функция f будет зависеть теперь не от одного, а от двух параметров (R и F), и течения являются подобными лишь при равенстве обоих этих чисел.

Наконец, скажем несколько слов о нестационарных движениях. Нестационарное движение определенного типа характеризуется наряду с величинами ν, u, l еще значением какого-либо характерного для этого движения интервала времени τ, определяющего изменение движения со временем. Так, при колебаниях погруженного в жидкость твердого тела определенной формы этим временем может являться период колебаний. Из четырех величин ν, u, l, τ можно опять составить не одну, а две независимые безразмерные величины, в качестве которых можно взять число Рейнольдса и число

$$S = u\tau/l, \tag{19,6}$$

называемое иногда *числом Струхала* (*Strouhal*). Подобие движений имеет место в таких случаях при равенстве обоих этих чисел.

Если колебания в жидкости возникают самопроизвольно (а не под влиянием заданной внешней вынуждающей силы), то для движения определенного типа число S будет определенной функцией числа R:

$$S = f(R).$$

§ 20. Течение при малых числах Рейнольдса

Уравнение Навье — Стокса заметно упрощается для движений с малым числом Рейнольдса. Для стационарного движения несжимаемой жидкости это уравнение имеет вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\,\Delta\mathbf{v}.$$

Член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет порядок величины u^2/l, где u и l имеют тот же смысл, как и в § 19. Выражение же $(\eta/\rho)\Delta\mathbf{v} \approx \eta u/\rho l^2$. Отношение первой величины ко второй есть как раз число Рейнольдса. Поэтому при $R \ll 1$ членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь, и уравнение движения сводится к линейному уравнению

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \mathrm{grad}\,p = 0. \tag{20,1}$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{20,2}$$

оно полностью определяет движение. Полезно также заметить уравнение

$$\Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0, \tag{20,3}$$

получающееся применением операции rot к уравнению (20,1).

Рассмотрим прямолинейное и равномерное движение шара в вязкой жидкости (*G. G. Stokes*, 1851). Эта задача вполне эквивалентна задаче об обтекании неподвижного шара потоком