Наконец, скажем несколько слов о нестационарных движениях. Нестационарное движение определенного типа характеризуется наряду с величинами ν, u, l еще значением какого-либо характерного для этого движения интервала времени τ, определяющего изменение движения со временем. Так, при колебаниях погруженного в жидкость твердого тела определенной формы этим временем может являться период колебаний. Из четырех величин ν, u, l, τ можно опять составить не одну, а две независимые безразмерные величины, в качестве которых можно взять число Рейнольдса и число

$$S = u\tau/l, \tag{19,6}$$

называемое иногда *числом Струхала* (*Strouhal*). Подобие движений имеет место в таких случаях при равенстве обоих этих чисел.

Если колебания в жидкости возникают самопроизвольно (а не под влиянием заданной внешней вынуждающей силы), то для движения определенного типа число S будет определенной функцией числа R:

$$S = f(R).$$

§ 20. Течение при малых числах Рейнольдса

Уравнение Навье — Стокса заметно упрощается для движений с малым числом Рейнольдса. Для стационарного движения несжимаемой жидкости это уравнение имеет вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\,\Delta\mathbf{v}.$$

Член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет порядок величины u^2/l, где u и l имеют тот же смысл, как и в § 19. Выражение же $(\eta/\rho)\Delta\mathbf{v} \approx \eta u/\rho l^2$. Отношение первой величины ко второй есть как раз число Рейнольдса. Поэтому при $R \ll 1$ членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь, и уравнение движения сводится к линейному уравнению

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \mathrm{grad}\,p = 0. \tag{20,1}$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{20,2}$$

оно полностью определяет движение. Полезно также заметить уравнение

$$\Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0, \tag{20,3}$$

получающееся применением операции rot к уравнению (20,1).

Рассмотрим прямолинейное и равномерное движение шара в вязкой жидкости (*G. G. Stokes*, 1851). Эта задача вполне эквивалентна задаче об обтекании неподвижного шара потоком жидкости, имеющим на бесконечность заданную скорость $\mathbf{u}$. Распределение скоростей в первой задаче получается из решения второй задачи просто вычитанием скорости $\mathbf{u}$; тогда жидкость на бесконечности оказывается неподвижной, а шар движется со скоростью $-\mathbf{u}$. Если мы рассматриваем движение как стационарное, то надо, конечно, говорить именно об обтекании жидкостью неподвижного шара, так как при движущемся шаре скорость жидкости в каждой точке пространства меняется со временем.

Поскольку $\operatorname{div}(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, то $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ может быть представлено в виде ротора некоторого вектора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{v}-\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

причем $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ обращается на бесконечности в нуль. Вектор $\mathbf{A}$ должен быть аксиальным для того, чтобы его ротор был полярным вектором, как скорость. В задаче об обтекании полностью симметричного тела — шара — нет никаких выделенных направлений за исключением направления $\mathbf{u}$. Этот параметр $\mathbf{u}$ должен входить в $\mathbf{A}$ линейно — в виду линейности уравнения движения и граничных условий к нему. Общий вид векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, удовлетворяющей всем этим требованиям, есть $\mathbf{A} = f'(r)\,[\mathbf{nu}]$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора $\mathbf{r}$ (начало координат выбираем в центре шара), а $f'(r)$ — скалярная функция от r. Произведение $f'(r)\mathbf{n}$ можно представить в виде градиента некоторой другой функции $f(r)$. Таким образом, мы будем искать скорость в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \operatorname{rot}[\nabla f\cdot\mathbf{u}] = \mathbf{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot} f\mathbf{u} \tag{20,4}$$

(в последнем равенстве учтено, что $\mathbf{u} = \mathrm{const}$).

Для определения функции f воспользуемся уравнением (20,3). Имеем:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot} f\mathbf{u} = (\operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta)\operatorname{rot} f\mathbf{u} = -\Delta\operatorname{rot} f\mathbf{u}.$$

Поэтому (20,3) принимает вид

$$\Delta^2\operatorname{rot} f\mathbf{u} = \Delta^2[\nabla f\cdot\mathbf{u}] = [\Delta^2\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{u}] = 0.$$

Отсюда следует, что должно быть

$$\Delta^2\operatorname{grad} f = 0. \tag{20,5}$$

Первое интегрирование дает $\Delta^2 f = \mathrm{const}$. Легко видеть, что const должна быть положена равной нулю. Действительно, на бесконечности разность $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ должна исчезать; тем более это относится к ее производным. Выражение же $\Delta^2 f$ содержит четвертые производные от f, между тем как сама скорость выражается через ее вторые производные.

Таким образом, имеем

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Delta f}{dr}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + c.$$

Постоянная c должна быть положена равной нулю для того, чтобы скорость $v - u$ исчезала на бесконечности. Интегрируя остающееся уравнение, находим:

$$f = ar + \frac{b}{r} \tag{20,6}$$

(аддитивная постоянная в f опущена как несущественная — скорость определяется производными от f).

Подстановка в (20,4) дает после простого вычисления

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a\frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} + b\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}}{r^3}. \tag{20,7}$$

Постоянные a и b должны быть определены из граничного условия $\mathbf{v} = 0$ при $r = R$ (на поверхности шара):

$$\mathbf{u}\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right) + \mathbf{n}(\mathbf{un})\left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3}\right) = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при произвольном $\mathbf{n}$, то коэффициенты при $\mathbf{u}$ и при $\mathbf{n}(\mathbf{un})$ должны обращаться в ноль каждый в отдельности. Отсюда находим $a = 3R/4$, $b = R^3/4$ и окончательно:

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r}, \tag{20,8}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{3R}{4}\frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} - \frac{R^3}{4}\frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{un})}{r^3} + \mathbf{u}. \tag{20,9}$$

Компоненты скорости в сферических координатах (с полярной осью в направлении $\mathbf{u}$):

$$\begin{aligned} v_r &= u\cos\theta\left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right], \\ v_\theta &= -u\sin\theta\left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right]. \end{aligned} \tag{20,10}$$

Этим определяется распределение скоростей вокруг движущегося шара.

Для определения давления подставляем (20,4) в (20,1):

$$\operatorname{grad} p = \eta\Delta\mathbf{v} = \eta\Delta\operatorname{rot}\operatorname{rot} f\mathbf{u} = \eta\Delta(\operatorname{grad}\operatorname{div} f\mathbf{u} - \mathbf{u}\Delta f).$$

Но $\Delta^2 f = 0$ и потому

$$\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}(\eta \Delta \operatorname{div} f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(\eta \mathbf{u} \operatorname{grad} \Delta f).$$

Отсюда

$$p = \eta \mathbf{u} \operatorname{grad} \Delta f + p_0 \tag{20,11}$$

(p_0 — давление жидкости на бесконечности). Подстановка f приводит к окончательному выражению

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\mathbf{un}}{r^2} R. \tag{20,12}$$

С помощью полученных формул можно вычислить силу $\mathbf{F}$ давления текущей жидкости на шар (или, что то же, силу сопротивления, испытываемую движущимся в жидкости шаром). Для этого введем сферические координаты с полярной осью вдоль скорости $\mathbf{u}$; все величины будут в силу симметрии функциями только от r и полярного угла θ. Очевидно, что сила $\mathbf{F}$ направлена по скорости $\mathbf{u}$. Абсолютная величина этой силы может быть определена с помощью (15,14). Определяя из этой формулы компоненты (по нормали и по касательной к поверхности) силы, приложенной к элементу поверхности шара, и проецируя эти компоненты на направление $\mathbf{u}$, найдем:

$$F = \int (-p\cos\theta + \sigma'_{rr}\cos\theta - \sigma'_{r\theta}\sin\theta)\, df, \tag{20,13}$$

где интегрирование производится по всей поверхности шара.

Подставив выражения (20,10) в формулы

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

(см. (15,20)), найдем, что на поверхности шара

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2R} u \sin\theta,$$

а давление (20,12)

$$p = p_0 - \frac{3\eta u}{2R}\cos\theta.$$

Поэтому интеграл (20,13) сводится к выражению

$$F = \frac{3\eta u}{2R}\int df.$$

Окончательно находим следующую *формулу Стокса* для силы сопротивления, действующей на медленно движущийся в жидкости шар[1]):

$$F = 6\pi R\eta u. \tag{20,14}$$

Отметим, что сила сопротивления оказывается пропорциональной первым степеням скорости и линейных размеров тела. Такая зависимость могла бы быть предсказана уже из соображений размерности. Дело в том, что в приближенные уравнения движения (20,1—2) параметр ρ — плотность жидкости — не входит. Поэтому определенная с их помощью сила F может выражаться только через величины η, u, R; из них можно составить только одну комбинацию с размерностью силы — произведение $\eta u R$.

Такая же зависимость имеет место и для медленно движущихся тел другой формы. Направление силы сопротивления, в общем случае тела произвольной формы, не совпадает с направлением скорости; в общем виде зависимость $\mathbf{F}$ от $\mathbf{u}$ может быть написана как

$$F_i = \eta a_{ik} u_k, \tag{20,15}$$

где a_{ik} — не зависящий от скорости тензор второго ранга. Существенно, что этот тензор симметричен. Это утверждение (справедливое в линейном по скорости приближении) является частным случаем общего закона, имеющего место для медленных движений, сопровождающихся диссипативными процессами (см. V, § 121).

Уточнение формулы Стокса

Полученное выше решение задачи об обтекании оказывается неприменимым на достаточно больших расстояниях от шара, несмотря на малость числа Рейнольдса. Для того чтобы убедиться в этом, оценим член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, которым мы пренебрегли (20,1). На больших расстояниях скорость $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$. Производные же от скорости на этих расстояниях — порядка величины uR/r^2, как это видно из (20.9). Следовательно, $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim u^2R/r^2$. Оставленные

[1]) Имея в виду некоторые дальнейшие применения, укажем, что если производить вычисления, пользуясь выражением (20,7) для скорости с неопределенными постоянными a и b, то получится

$$F = 8\pi a\eta u. \tag{20,14a}$$

Сила сопротивления может быть вычислена и для медленно движущегося произвольного трехосного эллипсоида. Соответствующие формулы можно найти в книге *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. Укажем здесь предельные выражения для плоского круглого диска (радиуса R), движущегося в направлении, перпендикулярном к своей плоскости:

$$F = 16\eta R u,$$

и для такого же диска, движущегося в своей плоскости:

$$F = (32/3)\,\eta R u.$$

же в уравнении (20,1) члены — порядка величины $\eta Ru/\rho r^3$ (как это можно увидеть из той же формулы (20,9) для скорости или формулы (20,12) для давления). Условие $u\eta R/\rho r^3 \gg u^2R/r^2$ выполняется только на расстояниях

$$r \ll \nu/u. \tag{20,16}$$

На бóльших расстояниях сделанные пренебрежения оказываются незаконными и полученное распределение скоростей неправильным.

Для получения распределения скоростей на больших расстояниях от обтекаемого тела следует учесть отброшенный в (20,1) член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Поскольку на этих расстояниях скорость $\mathbf{v}$ мало отличается от $\mathbf{u}$, то можно написать приближенно $(\mathbf{u}\nabla)$ вместо $(\mathbf{v}\nabla)$. Тогда мы получим для скорости на больших расстояниях линейное уравнение

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{20,17}$$

(*C. W. Oseen*, 1910). Мы не станем излагать здесь ход решения этого уравнения для обтекания шара[1]). Укажем лишь, что с помощью получаемого таким образом распределения скоростей можно вывести уточненную формулу для испытываемой шаром силы сопротивления (следующий член разложения этой силы по числу Рейнольдса $\mathrm{R} = uR/\nu$):

$$F = 6\pi\eta uR\left(1 + \frac{3Ru}{8\nu}\right). \tag{20,18}$$

Укажем также, что при решении задачи об обтекании бесконечного цилиндра жидкостью, движущейся в поперечном к цилиндру направлении, необходимо с самого начала решать уравнение Осеена (уравнение же (20,1) в этом случае вовсе не обладает решением, удовлетворяющим граничным условиям на поверхности тела и в то же время обращающимся в нуль на бесконечности). Отнесенная к единице длины сила сопротивления оказывается равной

$$F = \frac{4\pi\eta u}{1/2 - C - \ln(Ru/4\nu)} = \frac{4\pi\eta u}{\ln(3{,}70\nu/Ru)}, \tag{20,19}$$

где $C = 0{,}577\ldots$ — число Эйлера (*H. Lamb*, 1911)[2]).

---

[1]) Его можно найти в книгах: *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963, ч. 2, гл. II, § 25, 26; *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947, § 342, 343.

[2]) Невозможность вычисления силы сопротивления в задаче о цилиндре с помощью уравнения (20,1) очевидна уже из соображений размерности. Как уже отмечено выше, результат должен был бы выражаться только через параметры η, u, R. Но в данном случае речь идет о силе, отнесенной к единице длины цилиндра; величиной такой размерности могло бы быть только произведение ηu, не зависящее от размеров тела (и тем самым не обращающееся в нуль при $R \to 0$), что физически нелепо.

Возвращаясь к задаче об обтекании шара, надо сделать следующее замечание. Произведенная в уравнении (20,17) замена $\mathbf{v}$ на $\mathbf{u}$ в нелинейном члене оправдана вдали от шара, на расстояниях $r \gg R$. Естественно поэтому, что, давая правильное уточнение картины движения на больших расстояниях от обтекаемого тела, уравнение Осеена не дает такого уточнения на близких расстояниях (это проявляется в том, что решение уравнения (20,17), удовлетворяющее необходимым условиям на бесконечности, не удовлетворяет точному условию обращения в нуль скорости на поверхности шара; это условие соблюдается лишь для нулевого члена разложения скорости по степеням числа Рейнольдса и не выполняется уже для члена первого порядка). Поэтому на первый взгляд может показаться, что решение уравнения Осеена не может послужить для правильного вычисления поправочного члена в силе сопротивления. Это, однако, не так по следующей причине. Вклад в силу $\mathbf{F}$, связанный с движением жидкости на близких расстояниях (для которых $u \ll \nu/r$), должен быть разложим по степеням вектора $\mathbf{u}$. Поэтому первый происходящий от этого вклада отличный от нуля поправочный член в векторной величине $\mathbf{F}$ будет пропорционален $\mathbf{u}u^2$, т. е. дает поправку второго порядка по числу Рейнольдса и, таким образом, не отразится на поправке первого порядка в формуле (20,18).

Вычисление же следующих поправок к формуле Стокса и правильное уточнение картины течения на близких расстояниях с помощью прямого решения уравнения (20,17) невозможно. Хотя сам по себе вопрос об этих уточнениях и не столь важен, выяснение своеобразного характера последовательной теории возмущений для решения задач об обтекании вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса представляет заметный методический интерес (*S. Kaplun, P. A. Lagerstrom*, 1957; *I. Proudman, J. R. Pearson*, 1957). Опишем имеющую здесь место ситуацию, приведя все нужные для ее уяснения формулы, но не останавливаясь на детальном проведении вычислений[1]).

---

[1]) Его можно найти в книге *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967, гл. VIII (*Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. — Academic Press, 1964). Вычисления произведены здесь не в терминах скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, а в менее наглядных, но более компактных терминах функции тока. Для осесимметричных течений (к которым относится обтекание шара) функция тока $\psi(r, \theta)$ в сферических координатах вводится согласно определению

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0.$$

Тем самым тождественно удовлетворяется уравнение непрерывности (15, 22).

Для явного выявления малого параметра R — числа Рейнольдса — введем безразмерные скорость и радиус-вектор $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/u$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/R$ и ниже в этом параграфе будем обозначать их теми же буквами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$, опуская штрих. Тогда точное уравнение движения (которое возьмем в форме (15,10) с исключенным давлением) запишется в виде

$$\mathrm{R}\,\mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] + \Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0. \tag{20,20}$$

Выделим в пространстве вокруг обтекаемого шара две области: ближнюю и дальнюю, определенные соответственно условиями $r \ll 1/\mathrm{R}$ и $r \gg 1$. Вместе эти области исчерпывают все пространство, причем частично они перекрываются в «промежуточной» области

$$1/\mathrm{R} \gg r \gg 1. \tag{20,21}$$

При проведении последовательной теории возмущений исходным приближением в ближней области является стоксово приближение — решение уравнения $\Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$, получающегося из (20,20) пренебрежением члена с множителем R. Это решение дается формулами (20,10); в безразмерных переменных оно имеет вид

$$v_r^{(1)} = \cos\theta\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right), \quad v_\theta^{(1)} = -\sin\theta\left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right)$$
$$r \ll 1/\mathrm{R} \tag{20,22}$$

(индекс (1) отмечает первое приближение).

Первым приближением в дальней области является просто постоянное значение $\mathbf{v}^{(1)} = \boldsymbol{\nu}$, отвечающее невозмущенному однородному набегающему потоку ($\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении обтекания). Подстановка $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}^{(2)}$ в (20,20) приводит для $\mathbf{v}^{(2)}$ к уравнению Осеена

$$\mathrm{R}\,\mathrm{rot}\,[\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^{(2)}] + \Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^{(2)} = 0. \tag{20,23}$$

Решение должно удовлетворять условию обращения скорости $\mathbf{v}^{(2)}$ в нуль на бесконечности и условию сшивки с решением (20,22) в промежуточной области; последнее условие исключает, в частности, решения, слишком быстро возрастающие с уменьшением r[1]. Таким решением является следующее:

$$v_r^{(1)} + v_r^{(2)} = \cos\theta + \frac{3}{2\mathrm{R}r^2}\left\{1 - \left[1 + \frac{\mathrm{R}r}{2}(1+\cos\theta)\right]e^{-\frac{1}{2}r\mathrm{R}(1-\cos\theta)}\right\},$$
$$v_\theta^{(1)} + v_\theta^{(2)} = -\sin\theta + \frac{3}{4r}\sin\theta e^{-\frac{1}{2}r\mathrm{R}(1-\cos\theta)}, \quad r \gg 1. \tag{20,24}$$

---

[1]) Для фиксирования численных коэффициентов в решении надо также учесть условие обращения в нуль полного потока жидкости через всякую замкнутую поверхность, охватывающую собой обтекаемый шар.

Отметим, что естественной переменной для дальней области является не сама радиальная координата r, а произведение $\rho = r\mathrm{R}$. При введении этой переменной из уравнения (20,20) выпадает число R — в соответствии с тем, что при $r \gtrsim 1/\mathrm{R}$ вязкие и инерционные члены в уравнении сравниваются по порядку величины. Число R входит при этом в решение только через граничное условие сшивки с решением в ближней области. Поэтому разложение функции $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в дальней области является разложением по степеням R при заданных значениях произведения $\rho = r\mathrm{R}$; действительно, вторые члены в (20,24), будучи выражены через ρ, содержат множитель R.

Для проверки правильности сшивки друг с другом решений (20,22) и (20,24), замечаем, что в промежуточной области (20,21) $r\mathrm{R} \ll 1$ и выражения (20,24) могут быть разложены по этой переменной. С точностью до первых двух (после однородного потока) членов разложения находим:

$$v_r = \cos\theta\left(1 - \frac{3}{2r}\right) + \frac{3\mathrm{R}}{16}(1 - \cos\theta)(1 + 3\cos\theta),$$
$$v_\theta = -\sin\theta\left(1 - \frac{3}{4r}\right) - \frac{3\mathrm{R}}{8}\sin\theta(1 - \cos\theta). \qquad (20,25)$$

С другой стороны, в той же области $r \gg 1$ и потому в (20,22) можно опустить члены $\sim 1/r^3$; остающиеся выражения действительно совпадают с первыми членами в (20,25) (вторые члены в (20,25) понадобятся ниже).

Для перехода к следующему приближению в ближней области пишем $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$ и получаем из (20,20) уравнение для поправки второго приближения:

$$\Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^{(2)} = -\mathrm{R}\,\mathrm{rot}\,[\mathbf{v}^{(1)}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^{(1)}]. \qquad (20,26)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условию обращения в нуль на поверхности шара и условию сшивки с решением в дальней области; последнее означает, что главные члены в функции $\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r})$ при $r \gg 1$ должны совпасть со вторыми членами в (20,25). Таким решением является следующее:

$$v_r^{(2)} = \frac{3\mathrm{R}}{8}v_r^{(1)} + \frac{3\mathrm{R}}{32}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2\left(2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)(1 - 3\cos^2\theta),$$
$$v_\theta^{(2)} = -\frac{3\mathrm{R}}{8}v_\theta^{(1)} + \frac{3\mathrm{R}}{32}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(4 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3}\right)\sin\theta\cos\theta,$$
$$r \ll 1/\mathrm{R}. \qquad (20,27)$$

В промежуточной области в этих выражениях остаются только члены, не содержащие множителей $1/r$; эти члены действительно совпадают со вторыми членами в (20,25).

По распределению скоростей (20,27) можно вычислить поправку к формуле Стокса для силы сопротивления. Вторые члены в (20,27) в силу своей угловой зависимости не дают вклада в силу, а первые дают как раз тот поправочный член 3R/8, который был приведен в (20,18). В соответствии с изложенной выше аргументацией правильное распределение скоростей вблизи шара приводит (в рассмотренном приближении) к тому же результату для силы, что и решение уравнения Осеена.

Следующее приближение может быть получено путем продолжения описанной процедуры. В этом приближении появляются логарифмические члены в распределении скоростей, а в выражении (20,18) силы сопротивления скобка заменяется на

$$\left(1+\frac{3}{8}\mathrm{R}-\frac{9}{40}\mathrm{R}^2\ln\frac{1}{\mathrm{R}}\right)$$

(причем логарифм $\ln(1/\mathrm{R})$ предполагается большим)[1].

Задачи

1. Определить движение жидкости, заполняющей пространство между двумя концентрическими сферами (радиусов R_1 и R_2; $R_2 > R_1$), равномерно вращающимися вокруг различных диаметров с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 (числа Рейнольдса $\Omega_1 R_1^2/\nu$, $\Omega_2 R_2^2/\nu \ll 1$).

Решение. В силу линейности уравнений движение между двумя вращающимися сферами можно рассматривать как наложение двух движений, имеющих место, если одна из сфер покоится, а другая вращается. Положим сначала $\Omega_2 = 0$, т. е. вращается только внутренняя сфера. Естественно ожидать, что скорость жидкости в каждой точке будет направлена по касательной к окружности с центром на оси вращения в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Но в силу аксиальной симметрии относительно оси вращения давление не может иметь градиента в этом направлении. Поэтому уравнение движения (20,1) приобретает вид

$$\Delta\mathbf{v} = 0.$$

Вектор угловой скорости $\mathbf{\Omega}_1$ является аксиальным вектором. Рассуждения, аналогичные произведенным в тексте, показывают, что можно искать скорость в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}_1 f(r) = [\nabla f \cdot \mathbf{\Omega}_1].$$

Уравнение движения дает тогда $[\operatorname{grad}\Delta f\cdot\mathbf{\Omega}_1] = 0$, поскольку вектор $\operatorname{grad}\Delta f$ направлен по радиус-вектору, а произведение $[\mathbf{r}\mathbf{\Omega}_1]$ не может быть равно нулю при заданном $\mathbf{\Omega}_1$ и произвольном $\mathbf{r}$, то должно быть $\operatorname{grad}\Delta f = 0$, так что

$$\Delta f = \mathrm{const}.$$

Интегрируя, получаем

$$f = ar^2 + \frac{b}{r}, \qquad \mathbf{v} = \left(\frac{b}{r^3} - 2a\right)[\mathbf{\Omega}_1\mathbf{r}].$$

Постоянные a и b определяются из условий $\mathbf{v} = 0$ при $r = R_2$ и $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ при $r = R_1$, где $\mathbf{u} = [\mathbf{\Omega}_1\mathbf{r}]$ есть скорость точек вращающейся сферы. В результате получим:

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)[\mathbf{\Omega}_1\mathbf{r}].$$

[1]) См. *Proudman I, Pearson J. R.* — J. Fluid Mech., 1957, v. 2, p. 237.

Давление в жидкости остается постоянным ($p = p_0$). Аналогично получается для случая, когда вращается внешний шар, а внутренний покоится ($\Omega_1 = 0$):

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\Omega_2 \mathbf{r}].$$

В общем случае вращения обеих сфер имеем:

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left\{\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)[\Omega_1 \mathbf{r}] + \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\Omega_2 \mathbf{r}]\right\}.$$

Если внешний шар вообще отсутствует ($R_2 = \infty$, $\Omega_2 = 0$), т. е. мы имеем просто шар радиуса R, вращающийся в неограниченной жидкости, то

$$\mathbf{v} = \frac{R^3}{r^3}[\Omega \mathbf{r}].$$

Вычислим момент сил трения, действующих на шар в этом случае. Если выбрать сферические координаты с полярной осью по Ω, то

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_\varphi = v = \frac{R^3 \Omega}{r^2}\sin\theta.$$

Действующая на единицу поверхности шара сила трения равна

$$\sigma'_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\bigg|_{r=R} = -3\eta\Omega\sin\theta.$$

Полный действующий на шар момент сил трения есть

$$M = \int_0^\pi \sigma'_{r\varphi} R \sin\theta \cdot 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta,$$

откуда

$$M = -8\pi\eta R^3 \Omega.$$

Если отсутствует внутренний шар, то $\mathbf{v} = [\Omega_2 \mathbf{r}]$, т. е. жидкость просто вращается как целое вместе со сферой, внутри которой она находится.

2. Определить скорость круглой капли жидкости (с вязкостью η'), движущейся под влиянием силы тяжести в жидкости с вязкостью η (*W. Rybczynski*, 1911).

Решение. Пользуемся системой координат, в которой капля покоится. Для жидкости снаружи капли ищем решение уравнения (20,5) опять в виде (20,6), так что скорость имеет вид (20,7). Для жидкости же внутри капли надо искать решение, не обладающее особой точкой при $r = 0$ (причем должны оставаться конечными также и вторые производные от f, определяющие скорость). Таким общим решением является

$$f = \frac{A}{4} r^2 + \frac{B}{8} r^4,$$

чему соответствует скорость

$$\mathbf{v} = -A\mathbf{u} + Br^2[\mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n}) - 2\mathbf{u}].$$

На поверхности шара[1]) должны быть выполнены следующие условия. Нормальные составляющие скорости вещества вне ($\mathbf{v}^{(e)}$) и внутри ($\mathbf{v}^{(i)}$) капли должны обращаться в нуль:

$$v_r^{(i)} = v_r^{(e)} = 0.$$

Касательная компонента скорости должна быть непрерывна:

$$v_\theta^{(i)} = v_\theta^{(e)},$$

то же самое должно иметь место для компоненты $\sigma_{r\theta}$ тензора напряжений:

$$\sigma_{r\theta}^{(i)} = \sigma_{r\theta}^{(e)}$$

(условие же равенства компонент σ_{rr} тензора напряжений можно не писать — оно определило бы собой искомую скорость u, которую, однако, проще найти, как это сделано ниже). Из указанных четырех условий получаем четыре уравнения для постоянных a, b, A, B, решение которых дает

$$a = R\frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta+\eta')}, \quad b = R^3\frac{\eta'}{4(\eta+\eta')}, \quad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta+\eta')}.$$

Для силы сопротивления получаем согласно (20,14а):

$$F = 2\pi u\eta R\frac{2\eta + 3\eta'}{\eta+\eta'}.$$

При $\eta' \to \infty$ (что соответствует твердому шарику) эта формула переходит в формулу Стокса. В предельном же случае $\eta' \to 0$ (газовый пузырек) получается $F = 4\pi u\eta R$, т. е. сила сопротивления составляет 2/3 сопротивления твердому шарику.

Приравнивая F действующей на каплю силе тяжести $\frac{4\pi}{3}R^3(\rho-\rho')g$, найдем:

$$u = \frac{2R^2 g(\rho-\rho')(\eta+\eta')}{3\eta(2\eta+3\eta')}.$$

3. Две параллельные плоские круглые пластинки (радиуса R) расположены одна над другой на малом расстоянии друг от друга; пространство между ними заполнено жидкостью. Пластинки сближаются друг с другом с постоянной скоростью u, вытесняя жидкость. Определить испытываемое пластинками сопротивление (*O. Reynolds*).

Решение. Выбираем цилиндрические координаты с началом в центре нижней пластинки (которую полагаем неподвижной). Движение жидкости осесимметрично, а ввиду тонкости слоя жидкости в основном радиально ($v_z \ll v_r$), причем $\partial v_r/\partial r \ll \partial v_r/\partial z$. Поэтому уравнения движения принимают вид

$$\eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

[1]) Изменение формы капли при ее движении можно не рассматривать, так как оно представляет собой эффект высшего порядка малости. Но для того чтобы движущаяся капля фактически была шарообразной, силы поверхностного натяжения на ее границе должны превышать силы, происходящие от неравномерности давления и стремящиеся нарушить шаровую форму. Это значит, что должно быть $\eta u/R \ll \alpha/R$ (α — коэффициент поверхностного натяжения) или, подставляя $u \sim R^2 g\rho/\eta$:

$$R \ll (\alpha/\rho g)^{1/2}.$$

с граничными условиями

$$\text{при}\quad z=0:\quad v_r=v_z=0,$$
$$\text{при}\quad z=h:\quad v_r=0,\quad v_z=-u,$$
$$\text{при}\quad r=R:\quad p=p_0$$

(h — расстояние между пластинками, p_0 — внешнее давление). Из уравнений (1) находим:

$$v_r=\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dr}z(z-h).$$

Интегрируя же уравнение (2) по dz, получим:

$$u=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_0^h rv_r\,dz=-\frac{h^3}{12\eta r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right),$$

откуда

$$p=p_0+\frac{3\eta u}{h^3}(R^2-r^2).$$

Полная сила сопротивления, действующая на пластинку, равна

$$F=\frac{3\pi\eta uR^4}{2h^3}.$$

§ 21. Ламинарный след

При стационарном обтекании твердого тела вязкой жидкостью движение жидкости на больших расстояниях позади тела обладает своеобразным характером, который может быть исследован в общем виде вне зависимости от формы тела.

Обозначим через $\mathbf{U}$ постоянную скорость натекающего на тело потока жидкости (направление $\mathbf{U}$ выберем в качестве оси x с началом где-либо внутри обтекаемого тела). Истинную же скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде $\mathbf{U}+\mathbf{v}$; на бесконечности $\mathbf{v}$ обращается в нуль.

Оказывается, что на больших расстояниях позади тела скорость $\mathbf{v}$ заметно отлична от нуля лишь в сравнительно узкой области вокруг оси x. В эту область, называемую *ламинарным следом*[1]), попадают частицы жидкости, движущиеся вдоль линий тока, проходящих мимо обтекаемого тела на сравнительно небольших расстояниях от него. Поэтому движение жидкости в следе существенно завихрено. Дело в том, что источником завихренности при обтекании твердого тела вязкой жидкостью является именно его поверхность[2]). Это легко понять, вспомнив, что в картине потенциального обтекания, отвечающей иде-

[1]) В отличие от турбулентного следа — см. § 37.

[2]) На неправомерность утверждения о сохранении равенства $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$ вдоль линии тока, проходящей вдоль твердой поверхности, указывалось уже в § 9.