с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad z = 0: \quad v_r = v_z = 0, \\ &\text{при} \quad z = h: \quad v_r = 0, \quad v_z = -u, \\ &\text{при} \quad r = R: \quad p = p_0 \end{aligned}$$

(h — расстояние между пластинками, p_0 — внешнее давление). Из уравнений (1) находим:

$$v_r = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dr} z (z - h).$$

Интегрируя же уравнение (2) по dz, получим:

$$u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r \, dz = -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dp}{dr}\right),$$

откуда

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3}(R^2 - r^2).$$

Полная сила сопротивления, действующая на пластинку, равна

$$F = \frac{3\pi\eta u R^4}{2h^3}.$$

§ 21. Ламинарный след

При стационарном обтекании твердого тела вязкой жидкостью движение жидкости на больших расстояниях позади тела обладает своеобразным характером, который может быть исследован в общем виде вне зависимости от формы тела.

Обозначим через $\mathbf{U}$ постоянную скорость натекающего на тело потока жидкости (направление $\mathbf{U}$ выберем в качестве оси x с началом где-либо внутри обтекаемого тела). Истинную же скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде $\mathbf{U} + \mathbf{v}$; на бесконечности $\mathbf{v}$ обращается в нуль.

Оказывается, что на больших расстояниях позади тела скорость $\mathbf{v}$ заметно отлична от нуля лишь в сравнительно узкой области вокруг оси x. В эту область, называемую *ламинарным следом* [1]), попадают частицы жидкости, движущиеся вдоль линий тока, проходящих мимо обтекаемого тела на сравнительно небольших расстояниях от него. Поэтому движение жидкости в следе существенно завихрено. Дело в том, что источником завихренности при обтекании твердого тела вязкой жидкостью является именно его поверхность [2]). Это легко понять, вспомнив, что в картине потенциального обтекания, отвечающей иде-

[1]) В отличие от турбулентного следа — см. § 37.

[2]) На неправомерность утверждения о сохранении равенства $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ вдоль линии тока, проходящей вдоль твердой поверхности, указывалось уже в § 9.

альной жидкости, на поверхности тела обращается в нуль только нормальная, но не тангенциальная скорость жидкости $\mathbf{v}_t$. Между тем граничное условие прилипания для реальной жидкости требует обращения в нуль также и $\mathbf{v}_t$. При сохранении картины потенциального обтекания это привело бы к конечному скачку $\mathbf{v}_t$ — возникновению поверхностного ротора скорости. Под влиянием вязкости скачек размывается и завихренность проникает в глубь жидкости, откуда и переносится конвективным образом в область следа.

На линиях же тока, проходящих достаточно далеко от тела, влияние вязкости незначительно на всем их протяжении, и потому ротор скорости на них (равный нулю в натекающем из бесконечности потоке) остается практически равным нулю, как это было бы в идеальной жидкости. Таким образом, на больших расстояниях от тела движение жидкости можно считать потенциальным везде, за исключением лишь области следа.

Выведем формулы, связывающие свойства движения жидкости в следе с действующими на обтекаемое тело силами.

Полный поток импульса, переносимого жидкостью через какую-нибудь замкнутую поверхность, охватывающую собой обтекаемое тело, равен взятому по этой поверхности интегралу от тензора потока импульса:

$$\oint \Pi_{ik}\, df_k.$$

Компоненты тензора Π_{ik} равны:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\,(U_i + v_i)(U_k + v_k).$$

Напишем давление в виде $p = p_0 + p'$, где p_0 — давление на бесконечности. Интегрирование постоянного члена $p_0\delta_{ik} + \rho U_i U_k$ даст в результате нуль, поскольку для замкнутой поверхности векторный интеграл $\oint d\mathbf{f} = 0$. Обращается в нуль также и интеграл $\int \rho v_k\, df_k$: поскольку полное количество жидкости в рассматриваемом объеме остается неизменным, полный поток жидкости через охватывающую его поверхность должен исчезать. Наконец, вдали от тела скорость $\mathbf{v}$ мала по сравнению с $\mathbf{U}$. Поэтому если рассматриваемая поверхность расположена достаточно далеко от тела, то на ней можно пренебречь в Π_{ik} членом $\rho v_i v_k$ по сравнению с $\rho U_k v_i$. Таким образом, полный поток импульса будет равен интегралу

$$\oint (p'\delta_{ik} + \rho U_k v_i)\, df_k.$$

Выберем теперь в качестве рассматриваемого объема жидкости объем между двумя бесконечными плоскостями $x = \mathrm{const}$, из которых одна взята достаточно далеко впереди, а другая —

позади тела. При определении полного потока импульса интеграл по бесконечно удаленной «боковой» поверхности исчезает (так как на бесконечности $p' = 0$, $\mathbf{v} = 0$), и поэтому достаточно интегрировать только по обеим поперечным плоскостям. Получающийся таким образом поток импульса представляет собой, очевидно, разность между полным потоком импульса, втекающим через переднее, и потоком, вытекающим через заднее сечение. Но эта разность является в то же время количеством импульса, передаваемым в единицу времени от жидкости к телу, т. е. силой $\mathbf{F}$, действующей на обтекаемое тело.

Таким образом, компоненты силы $\mathbf{F}$ равны разностям

$$F_x = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) (p' + \rho U v_x)\, dy\, dz,$$

$$F_y = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) \rho U v_y\, dy\, dz, \quad F_z = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) \rho U v_z\, dy\, dz,$$

где интегрирование производится по бесконечным плоскостям $x = x_1$ (значительно позади) и $x = x_2$ (значительно впереди тела). Рассмотрим сначала первую из этих величин.

Вне следа движение потенциально, и потому справедливо уравнение Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2} (\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = \mathrm{const} \equiv p_0 + \frac{\rho}{2} U^2,$$

или, пренебрегая членом $\rho v^2/2$ по сравнению с $\rho \mathbf{U}\mathbf{v}$,

$$p' = -\rho U v_x.$$

Мы видим, что в этом приближении подынтегральное выражение в F_x обращается в нуль во всей области вне следа. Другими словами, интеграл по плоскости $x = x_2$ (проходящей впереди тела и не пересекающей след вовсе) исчезает полностью, а в интеграле по задней плоскости $x = x_1$ надо интегрировать лишь по площади сечения следа. Но внутри следа изменение давления p' — порядка величины ρv^2, т. е. мало по сравнению с $\rho U v_x$. Таким образом, приходим к окончательному результату, что сила сопротивления, действующая на тело в направлении обтекания, равна

$$F_x = -\rho U \int v_x\, dy\, dz, \tag{21,1}$$

где интегрирование производится по площади поперечного сечения следа вдали от тела. Скорость v_x в следе, разумеется, отрицательна — жидкость движется здесь медленнее, чем она двигалась бы при отсутствии тела. Обратим внимание на то, что стоящий (21,1) интеграл определяет «дефицит» расхода жидкости через сечение следа по сравнению с расходом при отсутствии тела.

Рассмотрим теперь силу (с компонентами F_y, F_z), стремящуюся сдвинуть тело в поперечном направлении. Эта сила называется *подъемной*. Вне следа, где движение потенциально, можно написать $v_y = \partial\varphi/\partial y$, $v_z = \partial\varphi/\partial z$; интеграл по проходящей везде вне следа плоскости $x = x_2$ обращается в нуль:

$$\int v_y\, dy\, dz = \int \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dy\, dz = 0, \qquad \int \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, dy\, dz = 0,$$

поскольку на бесконечности $\varphi = 0$. Таким образом, для подъемной силы получаем выражение

$$F_y = -\rho U \int v_y\, dy\, dz, \quad F_z = -\rho U \int v_z\, dy\, dz. \tag{21,2}$$

Интегрирование в этих формулах фактически тоже производится лишь по площади сечения следа. Если обтекаемое тело обладает осью симметрии (не обязательно полной аксиальной симметрии) и обтекание происходит вдоль направления этой оси, то осью симметрии обладает и движение жидкости вокруг тела. В этом случае подъемная сила, очевидно, отсутствует.

Вернемся снова к движению жидкости в следе. Оценка различных членов в уравнении Навье — Стокса показывает, что членом $\nu\Delta\mathbf{v}$ можно, вообще говоря, пренебречь на расстояниях r от тела, удовлетворяющих условию $rU/\nu \gg 1$ (ср. вывод обратного условия (20,16)); это и есть те расстояния, на которых движение жидкости (вне следа) можно считать потенциальным. Однако такое пренебрежение недопустимо даже на этих расстояниях в области внутри следа, поскольку здесь поперечные производные $\partial^2\mathbf{v}/\partial y^2$, $\partial^2\mathbf{v}/\partial z^2$ велики по сравнению с продольной производной $\partial^2\mathbf{v}/\partial x^2$.

Пусть Y — порядок величины ширины следа, т. е. тех расстояний от оси x, на которых скорость $\mathbf{v}$ заметно падает. Тогда порядки величины членов в уравнении Навье — Стокса:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim U\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{Uv}{x}, \qquad \nu\Delta\mathbf{v} \sim \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\nu v}{Y^2}.$$

Сравнив эти величины, найдем:

$$Y = (\nu x/U)^{1/2}. \tag{21,3}$$

Эта величина действительно мала по сравнению с x ввиду предположенного условия $Ux/\nu \gg 1$. Таким образом, ширина ламинарного следа растет пропорционально корню из расстояния до тела.

Чтобы определить закон убывания скорости в следе, обратимся к формуле (21,1). Область интегрирования в ней $\sim Y^2$.

Поэтому оценка интеграла дает $F_x \sim \rho U v Y^2$ и, использовав соотношение (21,3), получим искомый закон:

$$v \sim F_x/\rho\nu x. \tag{21,4}$$

Выяснив качественные особенности ламинарного движения вдали от обтекаемого тела, обратимся к выводу количественных формул, описывающих картину движения в следе и вне его.

Движение внутри следа

В уравнении Навье — Стокса стационарного движения

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{21,5}$$

вдали от тела используем приближение Осеена — заменяем член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ на $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v}$ (ср. (20,17)). Кроме того, в области внутри следа можно пренебречь в $\Delta\mathbf{v}$ производной по продольной координате x по сравнению с поперечными производными. Таким образом, исходим из уравнения

$$U\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}\right). \tag{21,6}$$

Ищем его решение в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_1$ — решение уравнения

$$U\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial z^2}\right). \tag{21,7}$$

Величину же $\mathbf{v}_2$, связанную с членом $-\nabla(p/\rho)$ в исходном уравнении (21,6), можно искать в виде градиента $\nabla\Phi$ от некоторого скаляра[1]. Поскольку вдали от тела производные по x малы по сравнению с производными по y и z, в рассматриваемом приближении надо пренебречь членом $\partial\Phi/\partial x$, т. е. считать $v_x = v_{1x}$. Таким образом, для v_x имеем уравнение

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right). \tag{21,8}$$

Это уравнение формально совпадает с двухмерным уравнением теплопроводности, причем роль времени играет x/U, а роль коэффициента температуропроводности — вязкость ν. Решение, убывающее с возрастанием y и z (при заданном x), а в пределе при $x \to 0$ приводящее к бесконечно малой ширине следа (в рассматриваемом приближении расстояния порядка размеров тела считаются малыми), есть

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu x}\exp\left\{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right\} \tag{21,9}$$

[1]) Далее в этом параграфе потенциал скорости обозначаем как Φ, в отличие от азимутального угла φ сферической системы координат.

(ср. § 51). Коэффициент в этой формуле выражен через силу сопротивления с помощью формулы (21,1), в которой, ввиду быстрой сходимости интеграла, можно распространить его по всей плоскости yz. Если ввести вместо декартовых координат сферические r, θ, φ с полярной осью по оси x, то области следа $\left(\sqrt{y^2+z^2} \ll x\right)$ будут соответствовать значения полярного угла $\theta \ll 1$. Формула (21,9) в этих координатах примет вид

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu r}\exp\left\{-\frac{Ur\theta^2}{4\nu}\right\}. \qquad (21,10)$$

Опущенный нами член с $\partial\Phi/\partial x$ (с Φ из получаемой ниже формулы (21,12)) дал бы в v_x член, содержащий дополнительную малость $\sim\theta$.

Такой же вид, как (21,9) (но с другими коэффициентами), должны иметь и v_{1y}, v_{1z}. Выберем направление подъемной силы в качестве оси y (так что $F_z = 0$). Согласно (21,2), и замечая, что на бесконечности $\Phi = 0$, имеем

$$\int v_y\,dy\,dz = \int\left(v_{1y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dy\,dz = \int v_{1y}\,dy\,dz = -\frac{F_y}{\rho U},$$

$$\int v_{1z}\,dy\,dz = 0.$$

Ясно поэтому, что v_{1y} отличается от (21,9) заменой F_x на F_y, а $v_{1z} = 0$. Таким образом, находим:

$$v_y = -\frac{F_y}{4\pi\rho\nu x}\exp\left\{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right\} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \qquad (21,11)$$

Для определения функции Φ поступаем следующим образом. Пишем уравнение непрерывности, пренебрегая в нем продольной производной $\partial v_x/\partial x$:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \approx \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = 0.$$

Продифференцировав это равенство по x и воспользовавшись уравнением (21,7) для v_{1y}, получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x}\right) = -\frac{\nu}{U}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\nu}{U}\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Наконец, подставив выражение для v_{1y} (первый член в (21,11)) и проинтегрировав по x, находим окончательно:

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{y}{y^2+z^2}\left\{\exp\left[-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right] - 1\right\} \qquad (21,12)$$

(постоянная интегрирования выбрана так, чтобы Φ оставалось конечным при $y = z = 0$). В сферических координатах (с азимутом φ, отсчитываемым от плоскости xy):

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{\cos\varphi}{r\theta}\left\{\exp\left[-\frac{Ur\theta^2}{4\nu}\right]-1\right\}. \qquad (21,13)$$

Из (21,11—13) видно, что v_y и v_z содержат в отличие от v_x наряду с членами, экспоненциально убывающими с увеличением θ (при заданном r), также и члены, значительно менее быстро убывающие при удалении от оси следа (как $1/\theta^2$).

Если подъемная сила отсутствует, то движение в следе осесимметрично и $\Phi \equiv 0$ [1]).

Движение вне следа

Вне следа течение жидкости можно считать потенциальным. Интересуясь лишь наименее быстро убывающими на больших расстояниях членами в потенциале Φ, ищем решение уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

в виде суммы двух членов:

$$\Phi = \frac{a}{r} + \frac{\cos\varphi}{r}f(\theta). \qquad (21,14)$$

Первый член здесь сферически симметричен и связан с силой F_x, а второй — симметричен относительно плоскости xy и связан с силой F_y.

Для функции $f(\theta)$ получаем уравнение

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right) - \frac{f}{\sin\theta} = 0.$$

Решение этого уравнения, конечное при $\theta \to \pi$, есть

$$f = b\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}. \qquad (21,15)$$

Коэффициент b можно определить из условия сшивки с решением внутри следа. Дело в том, что формула (21,13) относится к области углов $\theta \ll 1$, а решение (21,14) — к области $\theta \gg (\nu/Ur)^{1/2}$. Эти области перекрываются при $(\nu/Ur)^{1/2} \ll \theta \ll 1$, причем (21,13) сводится здесь к

$$\Phi = \frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{\cos\varphi}{r\theta},$$

[1]) Таков, в частности, след за обтекаемым шаром. Отметим в этой связи, что полученные формулы (как и формула (21,16) ниже) находятся в согласии с распределением скоростей (20,24) при обтекании с очень малыми числами Рейнольдса; в этом случае вся описанная картина отодвигается на очень большие расстояния $r \gg l/\mathrm{R}$ (l — размеры тела).

а второй член в (21,14) — к $2b\cos\varphi/r\theta$. Сравнив оба выражения, найдем, что надо положить $b = F_y/4\pi\rho U$.

Для определения коэффициента a в (21,14) замечаем, что полный поток жидкости через сферу S большого радиуса r (как и через всякую замкнутую поверхность) должен быть равен нулю. Но через часть S_0 этой сферы, являющуюся площадью сечения следа, втекает количество жидкости

$$-\int\limits_{S_0} v_x\,dy\,dz = \frac{F_x}{\rho U}.$$

Поэтому через всю остальную площадь сферы должно вытекать столько же жидкости, т. е. должно быть

$$\int\limits_{S-S_0} \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \frac{F_x}{\rho U}.$$

В силу малости S_0 по сравнению со всей площадью S, можно заменить это условие требованием

$$\int\limits_S \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \int\limits_S \nabla\Phi d\mathbf{f} = -4\pi a = \frac{F_x}{\rho U}, \tag{21,16}$$

откуда $a = -F_x/4\pi\rho U$.

Таким образом, собирая все полученные выражения, находим следующую формулу для потенциала скорости:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho U r}\left(-F_x + F_y\cos\varphi\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right). \tag{21,17}$$

Этим и определяется движение во всей области вне следа вдали от тела. Потенциал убывает с расстоянием как $1/r$. Соответственно скорость убывает как $1/r^2$. Если подъемная сила отсутствует, то движение вне следа осесимметрично.

§ 22. Вязкость суспензий

Жидкость, в которой взвешено большое количество мелких твердых частиц (суспензия), можно рассматривать как однородную среду, если мы интересуемся явлениями, характеризующимися расстояниями, большими по сравнению с размерами частиц. Такая среда будет обладать эффективной вязкостью η, отличной от вязкости η_0 основной жидкости. Эта вязкость может быть вычислена для случая малых концентраций взвешенных частиц (т. е. суммарный объем всех частиц предполагается малым по сравнению с объемом всей жидкости). Вычисления сравнительно просты для случая шарообразных частиц (*А. Эйнштейн*, 1906).

В качестве вспомогательной задачи необходимо предварительно рассмотреть влияние, которое оказывает один погруженный в жидкость твердый шарик на течение, обладающее по-