а второй член в (21,14) — к $2b\cos\varphi/r\theta$. Сравнив оба выражения, найдем, что надо положить $b = F_y/4\pi\rho U$.

Для определения коэффициента a в (21,14) замечаем, что полный поток жидкости через сферу S большого радиуса r (как и через всякую замкнутую поверхность) должен быть равен нулю. Но через часть S_0 этой сферы, являющуюся площадью сечения следа, втекает количество жидкости

$$-\int\limits_{S_0} v_x\,dy\,dz = \frac{F_x}{\rho U}.$$

Поэтому через всю остальную площадь сферы должно вытекать столько же жидкости, т. е. должно быть

$$\int\limits_{S-S_0} \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \frac{F_x}{\rho U}.$$

В силу малости S_0 по сравнению со всей площадью S, можно заменить это условие требованием

$$\int\limits_S \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \int\limits_S \nabla\Phi d\mathbf{f} = -4\pi a = \frac{F_x}{\rho U}, \tag{21,16}$$

откуда $a = -F_x/4\pi\rho U$.

Таким образом, собирая все полученные выражения, находим следующую формулу для потенциала скорости:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho U r}\left(-F_x + F_y\cos\varphi\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right). \tag{21,17}$$

Этим и определяется движение во всей области вне следа вдали от тела. Потенциал убывает с расстоянием как $1/r$. Соответственно скорость убывает как $1/r^2$. Если подъемная сила отсутствует, то движение вне следа осесимметрично.

§ 22. Вязкость суспензий

Жидкость, в которой взвешено большое количество мелких твердых частиц (суспензия), можно рассматривать как однородную среду, если мы интересуемся явлениями, характеризующимися расстояниями, большими по сравнению с размерами частиц. Такая среда будет обладать эффективной вязкостью η, отличной от вязкости η_0 основной жидкости. Эта вязкость может быть вычислена для случая малых концентраций взвешенных частиц (т. е. суммарный объем всех частиц предполагается малым по сравнению с объемом всей жидкости). Вычисления сравнительно просты для случая шарообразных частиц (*А. Эйнштейн*, 1906).

В качестве вспомогательной задачи необходимо предварительно рассмотреть влияние, которое оказывает один погруженный в жидкость твердый шарик на течение, обладающее постоянным градиентом скорости. Пусть невозмущенное шариком течение описывается линейным распределением скоростей

$$v_i^{(0)} = \alpha_{ik} x_k, \tag{22,1}$$

где α_{ik} — постоянный симметрический тензор. Давление в жидкости при этом постоянно: $p^{(0)} = \mathrm{const}$; условимся в дальнейшем отсчитывать давление от этого постоянного значения. В силу несжимаемости жидкости ($\operatorname{div} \mathbf{v}^{(0)} = 0$) тензор α_{ik} должен иметь равный нулю след:

$$\alpha_{ii} = 0. \tag{22,2}$$

Пусть теперь в начало координат помещен шарик радиуса R. Скорость измененного им течения обозначим посредством $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)}$; на бесконечности $\mathbf{v}^{(1)}$ должно обращаться в нуль, но вблизи шарика $\mathbf{v}^{(1)}$ отнюдь не мало по сравнению с $\mathbf{v}^{(0)}$. Из симметрии течения ясно, что шарик останется неподвижным, так что граничное условие гласит: $\mathbf{v} = 0$ при $r = R$.

Искомое решение уравнений движения (20,1—3) может быть получено непосредственно из найденного в § 20 решения (20,4) (с функцией f из (20,6)), если заметить, что производные от последнего по координатам тоже являются решениями. В данном случае мы ищем решение, зависящее как от параметров от компонент тензора α_{ik} (а не от вектора $\mathbf{u}$, как в § 20). Таковым является

$$\mathbf{v}^{(1)} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\alpha\nabla f) \qquad p = \eta_0 \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \Delta f}{\partial x_i\, \partial x_k},$$

где $(\alpha\nabla f)$ обозначает вектор с компонентами $\alpha_{ik}\, \partial f/\partial x_k$. Раскрывая эти выражения и выбирая постоянные a и b в функции $f = ar + b/r$ так, чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности шарика, получим в результате следующие формулы для скорости и давления:

$$v_i^{(1)} = \frac{5}{2}\left(\frac{R^5}{r^4} - \frac{R^3}{r^2}\right)\alpha_{kl} n_i n_k n_l - \frac{R^5}{r^4}\alpha_{ik} n_k, \tag{22,3}$$

$$p = -5\eta_0 \frac{R^3}{r^3}\alpha_{ik} n_i n_k \tag{22,4}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора).

Переходя теперь к самому вопросу об определении эффективной вязкости суспензии, вычислим среднее (по всему объему) значение тензора плотности потока импульса Π_{ik}, совпадающего в линейном по скорости приближении с тензором напряжений — σ_{ik}:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{V}\int \sigma_{ik}\, dV.$$

Интегрирование можно производить здесь по объему V сферы большого радиуса, который затем устремляем к бесконечности.

Прежде всего пишем тождественно:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) - \bar{p}\delta_{ik} + \\ + \frac{1}{V}\int\left\{\sigma_{ik} - \eta_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + p\delta_{ik}\right\}dV. \qquad (22,5)$$

В стоящем здесь интеграле подынтегральное выражение отлично от нуля лишь внутри твердых шариков; ввиду предполагаемой малости концентрации суспензии его можно вычислять для одного отдельного шарика, как если бы других вообще не было, после чего результат должен быть умножен на концентрацию n суспензии (число шариков в единице объема). Непосредственное вычисление такого интеграла требовало бы исследования внутренних напряжений в шариках. Можно, однако, обойти это затруднение путем преобразования интеграла по объему в интеграл по поверхности бесконечно удаленной сферы, проходящей только через жидкость. Для этого замечаем, что ввиду уравнений движения $\partial\sigma_{il}/\partial x_l = 0$ имеет место тождество

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}(\sigma_{il}x_k);$$

поэтому преобразование объемного интеграла в поверхностный дает

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) + n\oint\{\sigma_{il}x_k\,df_l - \eta_0(v_i\,df_k + v_k\,df_i)\}.$$

Член с $\bar{p}$ мы опустили, имея в виду, что среднее давление непременно обращается в нуль (действительно, это есть скаляр, который должен определяться линейной комбинацией компонент тензора α_{ik}; но единственный такой скаляр $\alpha_{ii} = 0$).

При вычислении интеграла по сфере очень большого радиуса в выражении (22,3) для скорости следует, конечно, сохранить лишь члены $\sim 1/r^2$. Простое вычисление дает для этого интеграла

$$n\eta_0\cdot 20\pi R^3\{5\alpha_{lm}\overline{n_i n_k n_l n_m} - \alpha_{il}\overline{n_k n_l}\},$$

где черта обозначает усреднение по направлениям единичного вектора $\mathbf{n}$. Производя усреднение[1]), получим окончательно:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) + 5\eta_0\alpha_{ik}\frac{4\pi R^3}{3}n. \qquad (22,6)$$

[1]) Искомые средние значения произведений компонент единичного вектора представляют собой симметричные тензоры, которые могут быть составлены только из единичных тензоров δ_{ik}. Имея это в виду, легко найти, что

$$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \quad \overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

Первое слагаемое в (22,6) после подстановки в него $\mathbf{v}^{(0)}$ из (22,1) дает $2\eta_0\alpha_{ik}$; член же первого порядка малости в этом слагаемом тождественно обращается в нуль после усреднения по направлениям $\mathbf{n}$ (как и должно было быть, поскольку весь эффект заключен в выделенном в (22,5) интеграле). Поэтому искомая относительная поправка в эффективной вязкости суспензии η определяется отношением второго члена в (22,6) к первому. Таким образом, получим

$$\eta = \eta_0\left(1 + \frac{5}{2}\varphi\right), \qquad \varphi = \frac{4\pi R^3}{3}n, \tag{22,7}$$

где φ — малое отношение суммарного объема всех шариков к полному объему суспензии.

Уже для суспензии с частицами в виде эллипсоидов вращения аналогичные вычисления и окончательные формулы становятся очень громоздкими[1]). Приведем для иллюстрации числовые значения поправочного коэффициента A в формуле

$$\eta = \eta_0(1 + A\varphi), \qquad \varphi = \frac{4\pi ab^2}{3}n$$

для нескольких значений отношения a/b (a и $b = c$ — полуоси эллипсоидов):

$a/b =$	0,1	0,2	0,5	1,0	2	5	10
$A =$	8,04	4,71	2,85	2,5	2,91	5,81	13,6

Поправка возрастает по обе стороны от значения $a/b = 1$, отвечающего сферическим частицам.

§ 23. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости

Если нелинейные члены в уравнениях движения вязкой жидкости не исчезают тождественно, решение этих уравнений представляет большие трудности, и точные решения могут быть получены лишь в очень небольшом числе случаев. Такие решения представляют существенный интерес — если не всегда физический (ввиду фактического возникновения турбулентности при достаточно больших значениях числа Рейнольдса), то, во всяком случае, методический.

Ниже приводятся примеры точных решений уравнений движения вязкой жидкости.

---

[1]) В потоке суспензии с нешарообразными частицами наличие градиентов скорости оказывает ориентирующее действие на частицы. Под влиянием одновременного воздействия ориентирующих гидродинамических сил и дезориентирующего вращательного броуновского движения устанавливается анизотропное распределение частиц по их ориентации в пространстве. Этот эффект, однако, не должен учитываться при вычислении поправки к вязкости η: анизотропия ориентационного распределения сама зависит от градиентов скорости (в первом приближении — линейно) и ее учет привел бы к появлению в тензоре напряжений нелинейных по градиентам членов.