

Первое слагаемое в (22,6) после подстановки в него  $v^{(0)}$  из (22,1) дает  $2\eta_0\alpha_{ik}$ ; член же первого порядка малости в этом слагаемом тождественно обращается в нуль после усреднения по направлениям  $n$  (как и должно было быть, поскольку весь эффект заключен в выделенном в (22,5) интеграле). Поэтому искомая относительная поправка в эффективной вязкости суспензии  $\eta$  определяется отношением второго члена в (22,6) к первому. Таким образом, получим

$$\eta = \eta_0 \left( 1 + \frac{5}{2} \Phi \right), \quad \Phi = \frac{4\pi R^3}{3} n, \quad (22,7)$$

где  $\Phi$  — малое отношение суммарного объема всех шариков к полному объему суспензии.

Уже для суспензии с частицами в виде эллипсоидов вращения аналогичные вычисления и окончательные формулы становятся очень громоздкими<sup>1)</sup>. Приведем для иллюстрации числовые значения поправочного коэффициента  $A$  в формуле

$$\eta = \eta_0 (1 + A\Phi), \quad \Phi = \frac{4\pi ab^2}{3} n$$

для нескольких значений отношения  $a/b$  ( $a$  и  $b = c$  — полуоси эллипсоидов):

$a/b = 0,1$	$0,2$	$0,5$	$1,0$	$2$	$5$	$10$
$A = 8,04$	$4,71$	$2,85$	$2,5$	$2,91$	$5,81$	$13,6$

Поправка возрастает по обе стороны от значения  $a/b = 1$ , отвечающего сферическим частицам.

### § 23. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости

Если нелинейные члены в уравнениях движения вязкой жидкости не исчезают тождественно, решение этих уравнений представляет большие трудности, и точные решения могут быть получены лишь в очень небольшом числе случаев. Такие решения представляют существенный интерес — если не всегда физический (ввиду фактического возникновения турбулентности при достаточно больших значениях числа Рейнольдса), то, во всяком случае, методический.

Ниже приводятся примеры точных решений уравнений движения вязкой жидкости.

<sup>1)</sup> В потоке суспензии с нешарообразными частицами наличие градиентов скорости оказывает ориентирующее действие на частицы. Под влиянием одновременного воздействия ориентирующих гидродинамических сил и дезориентирующего вращательного броуновского движения устанавливается анизотропное распределение частиц по их ориентации в пространстве. Этот эффект, однако, не должен учитываться при вычислении поправки к вязкости  $\eta$ : анизотропия ориентационного распределения сама зависит от градиентов скорости (в первом приближении — линейно) и ее учет привел бы к появлению в тензоре напряжений нелинейных по градиентам членов.

*Увлечение жидкости вращающимся диском*

Бесконечный плоский диск, погруженный в вязкую жидкость, равномерно вращается вокруг своей оси. Требуется определить движение жидкости, приводимой в движение диском (*T. Kármán, 1921*). Выбираем плоскость диска в качестве плоскости  $z = 0$  цилиндрических координат. Диск вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Рассматриваем неограниченную жидкость с той стороны диска, где  $z > 0$ . Предельные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} v_r = 0, \quad v_\varphi = \Omega r, \quad v_z = 0 & \text{ при } z = 0, \\ v_r = 0, \quad v_\varphi = 0 & \text{ при } z = \infty. \end{aligned}$$

Аксиальная скорость  $v_z$  не исчезает при  $z \rightarrow \infty$ , а стремится к постоянному отрицательному пределу, определяющемуся из самих уравнений движения. Дело в том, что, поскольку жидкость движется радиально по направлению от оси вращения, в особенности вблизи диска, для обеспечения непрерывности в жидкости должен существовать постоянный вертикальный поток по направлению из бесконечности к диску. Решение уравнений движения ищем в виде

$$\begin{aligned} v_r = r\Omega F(z_1); \quad v_\varphi = r\Omega G(z_1); \quad v_z = \sqrt{v\Omega} H(z_1); \\ \rho = -\rho v\Omega P(z_1), \quad \text{где } z_1 = \sqrt{\frac{\Omega}{v}} z. \end{aligned} \quad (23,1)$$

В этом распределении радиальная и круговая скорости пропорциональны расстоянию от оси вращения диска, а вертикальная скорость  $v_z$  постоянна вдоль каждой горизонтальной плоскости.

Подстановка в уравнения Навье — Стокса и уравнение непрерывности приводит к следующим уравнениям для функций  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $P$ :

$$\begin{aligned} F^2 - G^2 + F'H = F'', \quad 2FG + G'H = G'', \\ HH' = P' + H'', \quad 2F + H' = 0 \end{aligned} \quad (23,2)$$

(штрих означает дифференцирование по  $z_1$ ) с предельными условиями:

$$\begin{aligned} F = 0, \quad G = 1, \quad H = 0 & \text{ при } z_1 = 0, \\ F = 0, \quad G = 0 & \text{ при } z_1 = \infty. \end{aligned} \quad (23,3)$$

Мы свели, таким образом, решение задачи к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной переменной, которое может быть произведено численным образом. На рис. 7 изображены полученные таким способом графики функций  $F$ ,  $G$ ,  $-H$ . Предельное значение функции  $H$  при  $z_1 \rightarrow \infty$  равно  $-0,886$ ; другими словами, скорость потока жидкости, текущего из бесконечности к диску, равна

$$v_z(\infty) = -0,886 \sqrt{v\Omega}.$$

Сила трения, действующая на единицу поверхности диска по направлению, перпендикулярному к его радиусу, есть  $\sigma_{z\varphi} =$

$= \eta \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}$ . Пренебрегая эффектами от краев диска, можно написать для диска большого, но конечного радиуса  $R$  момент действующих на него сил трения в виде

$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\varphi} dr = \pi R^4 \rho \sqrt{\nu \Omega^3} G'(0)$$

(множитель 2 перед интегралом учитывает наличие у диска двух сторон, омываемых жидкостью). Численное вычисление функции  $G$  приводит к формуле

$$M = -1,94 \cdot R^4 \rho \sqrt{\nu \Omega^3}. \tag{23,4}$$

*Течения в диффузоре и конфузоре*

Требуется определить стационарное движение жидкости между двумя плоскими стенками, наклоненными друг к другу под углом (на рис. 8 изображен поперечный разрез обеих плоскостей); истечение происходит вдоль линии пересечения плоскостей (*G. Hamel, 1917*).

Выбираем цилиндрические координаты  $r, z, \varphi$  с осью  $z$  вдоль линий пересечения плоскостей (точка  $O$  на рис. 8) и углом  $\varphi$ , отсчитываемым указанным на рис. 8 образом. Движение однородно вдоль оси  $z$ , и естественно предположить, что оно будет чисто радиальным, т. е.  $v_\varphi = v_z = 0, v_r = v(r, \varphi)$ . Уравнения (15,18) дают

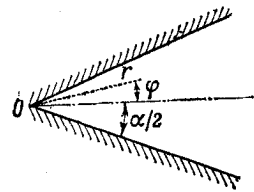


Рис. 8

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right); \tag{23,5}$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0; \tag{23,6}$$

$$\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что  $rv$  есть функция только от  $\varphi$ . Введя функцию

$$u(\varphi) = \frac{1}{6\nu} rv, \quad (23,7)$$

получаем из (23,6):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{12\nu^2}{r^2} \frac{du}{d\varphi},$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2} u(\varphi) + f(r).$$

Подставляя это выражение в (23,5), получаем уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 4u + 6u^2 = \frac{1}{6\nu^2} r^3 f'(r),$$

откуда видно, что как левая, так и правая части, зависящие соответственно только от  $\varphi$  и только от  $r$ , являются, каждая в отдельности, постоянной величиной, которую мы обозначим как  $2C_1$ . Таким образом:

$$f'(r) = 12\nu^2 C_1 \frac{1}{r^3},$$

откуда

$$f(r) = -\frac{6\nu^2 C_1}{r^2} + \text{const},$$

и окончательно имеем для давления

$$\frac{p}{\rho} = \frac{6\nu^2}{r^2} (2u - C_1) + \text{const}. \quad (23,8)$$

Для  $u(\varphi)$  имеем уравнение

$$u'' + 4u + 6u^2 = 2C_1,$$

которое после умножения на  $u'$  и первого интегрирования дает

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1 u - 2C_2 = 0.$$

Отсюда получаем:

$$2\varphi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2}} + C_3, \quad (23,9)$$

чем и определяется искомая зависимость скорости от  $\varphi$ ; функция  $u(\varphi)$  может быть выражена отсюда посредством эллиптических функций. Три постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  определяются из граничных условий на стенках

$$u\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad (23,10)$$

и из условия, что через любое сечение  $r = \text{const}$  проходит (в 1 сек.) одинаковое количество жидкости  $Q$ :

$$Q = \rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} vr \, d\varphi = 6\nu\rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} u \, d\varphi. \quad (23,11)$$

$Q$  может быть как положительным, так и отрицательным. Если  $Q > 0$ , то линия пересечения плоскостей является источником, т. е. жидкость вытекает из вершины угла (о таком течении говорят как о течении в *диффузоре*). Если  $Q < 0$ , то эта линия является стоком, и мы имеем дело со сходящимся к вершине угла течением (или, как говорят, с течением в *конфузоре*). Отношение  $|Q|/\rho\nu$  является безразмерным и играет роль числа Рейнольдса для рассматриваемого движения.

Рассмотрим сначала конфузорное движение ( $Q < 0$ ). Для исследования решения (23,9—11) сделаем оправдывающееся в дальнейшем предположение, что движение симметрично относительно плоскости  $\varphi = 0$  (т. е.  $u(\varphi) = u(-\varphi)$ ), причем функция  $u(\varphi)$  везде отрицательна (скорость направлена везде к вершине угла) и монотонно меняется от значения 0 при  $\varphi = \pm\alpha/2$  до значения  $-u_0$  ( $u_0 > 0$ ) при  $\varphi = 0$ , так что  $u_0$  есть максимум  $|u|$ . Тогда при  $u = -u_0$  должно быть  $du/d\varphi = 0$ , откуда заключаем, что  $u = -u_0$  есть корень кубического многочлена, стоящего под корнем в подынтегральном выражении в (23,9), так что можно написать:

$$-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2 = (u + u_0) [-u^2 - (1 - u_0)u + q],$$

где  $q$  — новая постоянная. Таким образом, имеем:

$$2\varphi = \pm \int_{-u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(u + u_0) [-u^2 - (1 - u_0)u + q]}}, \quad (23,12)$$

причем постоянные  $u_0$  и  $q$  определяются из условий

$$\alpha = \int_{-u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{(u + u_0) [-u^2 - (1 - u_0)u + q]}}, \quad (23,13)$$

$$\frac{R}{6} = \int_{-u_0}^0 \frac{u \, du}{\sqrt{(u + u_0) [-u^2 - (1 - u_0)u + q]}}$$

(где  $R = |Q|/\nu\rho$ ); постоянная  $q$  должна быть положительна, в противном случае эти интегралы сделались бы комплексными. Эти два уравнения имеют, как можно показать, решения для  $u_0$  и  $q$  при любых  $R$  и  $\alpha < \pi$ . Другими словами, сходящееся (конфузорное) симметрическое течение (рис. 9) возможно при любом угле раствора  $\alpha < \pi$  и любом числе Рейнольдса. Рассмотрим подробнее движение при очень больших  $R$ . Большим  $R$  соответствуют также и большие значения  $u_0$ . Написав (23,12) (для

$\varphi > 0$ ) в виде

$$2\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) = \int_u^0 \frac{du}{\sqrt{(u+u_0)[-u^2 - (1-u_0)u + q]}}$$

мы видим, что во всей области интегрирования подинтегральное выражение теперь мало, если только  $|u|$  не близко к  $u_0$ . Это значит, что  $|u|$  может быть заметно отличным от  $u_0$  только при  $\varphi$ , близких  $\pm\alpha/2$ , т. е. в непосредственной близости от стенок<sup>1)</sup>. Другими словами, почти во всем интервале углов  $\varphi$  получается  $u \approx \text{const} = -u_0$ , причем, как показывают равенства (23,13), должно быть  $u_0 = R/6\alpha$ . Самая скорость  $v$  равна  $v = |Q|/\rho\alpha r$ , что соответствует потенциальному невязкому течению со скоростью, не зависящей от угла и падающей по величине обратно

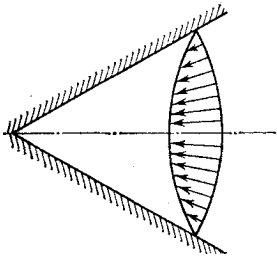


Рис. 9

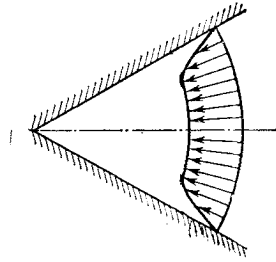


Рис. 10

пропорционально  $r$ . Таким образом, при больших числах Рейнольдса течение в конфузоре очень мало отличается от потенциального течения идеальной жидкости. Влияние вязкости проявляется только в очень узком слое вблизи стенок, где происходит быстрое падение скорости от значения, соответствующего потенциальному потоку, до нуля (рис. 10).

Пусть теперь  $Q > 0$ , т. е. мы имеем дело с диффузорным течением. Сделаем сначала опять предположение, что движение симметрично относительно плоскости  $\varphi = 0$  и что  $u(\varphi)$  (теперь  $u > 0$ ) монотонно меняется от нуля при  $\varphi = \pm\alpha/2$  до  $u = u_0 > 0$  при  $\varphi = 0$ . Вместо (23,13) пишем теперь:

$$\alpha = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u_0-u)[u^2 + (1+u_0)u + q]}}$$

$$\frac{R}{6} = \int_0^{u_0} \frac{u du}{\sqrt{(u_0-u)[u^2 + (1+u_0)u + q]}}$$
(23,14)

<sup>1)</sup> Может возникнуть вопрос о том, каким образом этот интеграл может сделаться не малым даже при  $u \approx -u_0$ . В действительности при очень больших  $u_0$  один из корней трехчлена  $-u^2 - (1-u_0)u + q$  оказывается тоже близким к  $-u_0$ , так что все подкоренное выражение имеет два почти совпадающих корня и потому весь интеграл «почти расходится» при  $u = -u_0$ .

Если рассматривать  $u_0$  как заданное, то  $\alpha$  монотонно возрастает с уменьшением  $q$  и имеет наибольшее возможное значение при  $q = 0$ :

$$\alpha_{\max} = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u(u_0 - u)(u + u_0 + 1)}}.$$

С другой стороны, как легко убедиться, при заданном  $q$   $\alpha$  есть монотонно убывающая функция от  $u_0$ . Отсюда следует, что  $u_0$  как функция от  $q$  при заданном  $\alpha$  есть монотонно убывающая функция, так что ее наибольшее значение соответствует  $q = 0$  и определяется написанным равенством. Наибольшему  $u_0$  соответствует также и наибольшее  $R = R_{\max}$ . С помощью подстановки

$$k^2 = \frac{u_0}{1 + 2u_0}, \quad u = u_0 \cos^2 x$$

можно представить зависимость  $R_{\max}$  от  $\alpha$  в параметрическом виде:

$$\alpha = 2 \sqrt{1 - 2k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}},$$

$$R_{\max} = -6\alpha \frac{1 - k^2}{1 - 2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1 - 2k^2}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx. \quad (23,15)$$

Таким образом, симметричное, везде расходящееся течение в диффузоре (рис. 11, а) возможно для данного угла раствора

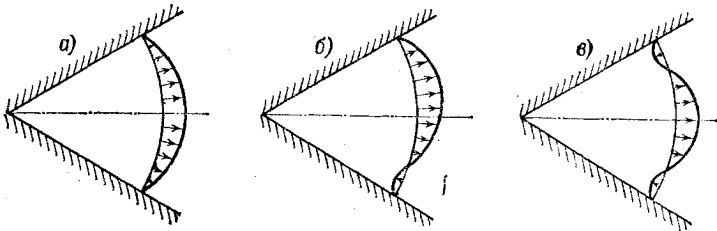


Рис. 11

только при числах Рейнольдса, не превышающих определенного предела. При  $\alpha \rightarrow \pi$  (чему соответствует  $k \rightarrow 0$ )  $R_{\max}$  стремится к нулю. При  $\alpha \rightarrow 0$  (чему соответствует  $k \rightarrow 1/\sqrt{2}$ )  $R_{\max}$  стремится к бесконечности по закону  $R_{\max} = 18,8/\alpha$ .

При  $R > R_{\max}$  предположение о симметричном, везде расходящемся течении в диффузоре незаконно, так как условия (23,14) не могут быть выполнены. В интервале углов

$-\alpha/2 \leq \varphi \leq \alpha/2$  функция  $u(\varphi)$  должна иметь несколько максимумов или минимумов. Соответствующие этим экстремумам значения  $u(\varphi)$  должны по-прежнему быть корнями стоящего под корнем многочлена. Поэтому ясно, что трехчлен  $u^2 + (1 + u_0)u + q$  (с  $u_0 > 0$ ,  $q > 0$ ) должен иметь в этой области два вещественных отрицательных корня, так что стоящее под корнем выражение может быть написано в виде

$$(u_0 - u)(u + u'_0)(u + u''_0),$$

где  $u_0 > 0$ ,  $u'_0 > 0$ ,  $u''_0 > 0$ ; пусть  $u'_0 < u''_0$ . Функция  $u(\varphi)$  может, очевидно, изменяться в интервале  $u \geq u'_0 \geq -u'_0$ , причем  $u = u_0$  соответствует положительному максимуму  $u(\varphi)$ , а  $u = -u'_0$  — отрицательному минимуму. Не останавливаясь подробнее на исследовании получающихся таким образом решений, укажем, что при  $R > R_{\max}$  возникает сначала решение, при котором скорость имеет один максимум и один минимум, причем движение асимметрично относительно плоскости  $\varphi = 0$  (рис. 11, б). При дальнейшем увеличении  $R$  возникает симметричное решение с одним максимумом и двумя минимумами скорости (рис. 11, в) и т. д. Во всех этих решениях имеются, следовательно, наряду с областями вытекающей жидкости также и области втекающих потоков (но, конечно, так, что полный расход жидкости  $Q > 0$ ). При  $R \rightarrow \infty$  число чередующихся минимумов и максимумов неограниченно возрастает, так что никакого определенного предельного решения не существует. Подчеркнем, что при диффузорном течении решение не стремится, таким образом, при  $R \rightarrow \infty$  к решению уравнений Эйлера, как это имеет место при конфузорном движении. Наконец, отметим, что при увеличении  $R$  стационарное диффузорное движение описанного типа вскоре после достижения  $R = R_{\max}$  делается неустойчивым и возникает турбулентность.

### Затопленная струя

Требуется определить движение в струе жидкости, бьющей из конца тонкой трубки и попадающей в неограниченное пространство, заполненное той же жидкостью, — так называемая *затопленная струя* (Л. Ландау, 1943).

Выбираем сферические координаты  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  с полярной осью вдоль направления скорости струи в точке ее выхода, которая выбирается в качестве начала координат. Движение обладает аксиальной симметрией вокруг полярной оси, так что  $v_\varphi = 0$ , а  $v_\theta$ ,  $v_r$  являются функциями только от  $r$ ,  $\theta$ . Через всякую замкнутую поверхность вокруг начала координат (в частности, через бесконечно удаленную) должен протекать одинаковый полный поток импульса («импульс струи»). Для этого скорость должна



падать обратно пропорционально расстоянию  $r$  от начала координат, так что

$$v_r = \frac{1}{r} F(\theta), \quad v_\theta = \frac{1}{r} f(\theta), \quad (23,16)$$

где  $F, f$  — некоторые функции только от  $\theta$ . Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v_\theta) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$F(\theta) = -\frac{df}{d\theta} - f \operatorname{ctg} \theta. \quad (23,17)$$

Компоненты  $\Pi_{r\varphi}$ ,  $\Pi_{\theta\varphi}$  тензора потока импульса в струе тождественно исчезают, как это явствует уже из соображений симметрии. Сделаем предположение, что равны нулю также и компоненты  $\Pi_{\theta\theta}$  и  $\Pi_{\varphi\varphi}$  (оно оправдывается тем, что в результате мы получим решение, удовлетворяющее всем необходимым условиям). С помощью выражений (15,20) для компонент тензора  $\sigma_{ik}$  и формул (23,16—17) легко убедиться в том, что между компонентами  $\Pi_{\theta\theta}$ ,  $\Pi_{\varphi\varphi}$  и  $\Pi_{r\theta}$  тензора потока импульса в струе имеется соотношение

$$\sin^2 \theta \Pi_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta (\Pi_{\varphi\varphi} - \Pi_{\theta\theta})].$$

Поэтому из равенства нулю  $\Pi_{\varphi\varphi}$  и  $\Pi_{\theta\theta}$  следует, что и  $\Pi_{r\theta} = 0$ . Таким образом, из всех компонент  $\Pi_{ik}$  отлична от нуля только  $\Pi_{rr}$ , зависящая от  $r$  как  $r^{-2}$ . Легко видеть, что при этом уравнения движения  $\partial \Pi_{ik} / \partial x_k = 0$  удовлетворяются автоматически.

Далее, пишем:

$$\frac{1}{\rho} (\Pi_{\theta\theta} - \Pi_{\varphi\varphi}) = -\frac{1}{r^2} (f^2 + 2vf \operatorname{ctg} \theta - 2vf') = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{f} \right) + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{f} + \frac{1}{2v} = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$f = -\frac{2v \sin \theta}{A - \cos \theta}, \quad (23,18)$$

а из (23,17) получаем теперь для  $F$ :

$$F = 2v \left\{ \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right\}. \quad (23,19)$$

Распределение давления определяем из уравнения

$$\frac{1}{\rho} \Pi_{\theta\theta} = \frac{p}{\rho} + \frac{f}{r^2} (f + 2v \operatorname{ctg} \theta) = 0$$

и получаем:

$$p - p_0 = - \frac{4\rho v^2}{r^2} \frac{A \cos \theta - 1}{(A - \cos \theta)^2} \quad (23,20)$$

( $p_0$  — давление на бесконечности).

Постоянную  $A$  можно связать с «импульсом струи», — полным потоком импульса в ней. Он равен интегралу по сферической поверхности:

$$P = \oint \Pi_{rr} \cos \theta df = 2\pi \int_0^\pi r^2 \Pi_{rr} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Величина  $\Pi_{rr}$  равна

$$\frac{1}{\rho} \Pi_{rr} = \frac{4v^2}{r^2} \left\{ \frac{(A^2 - 1)^2}{(A - \cos \theta)^4} - \frac{A}{A - \cos \theta} \right\},$$

и вычисление интеграла приводит к результату

$$P = 16\pi v^2 \rho A \left\{ 1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right\}. \quad (23,21)$$

Формулы (23,16—21) решают поставленную задачу. При изменении постоянной  $A$  от 1 до  $\infty$  импульс струи  $P$  пробегает все значения от  $\infty$  до 0.

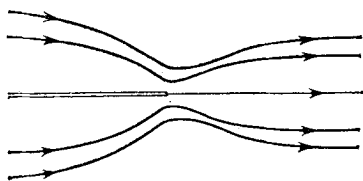


Рис. 12

Линии тока определяются уравнением

$$dr/v_r = r d\theta/v_\theta,$$

интегрирование которого дает

$$\frac{r \sin^2 \theta}{A - \cos \theta} = \text{const.} \quad (23,22)$$

На рис. 12 изображен характерный вид линий тока. Течение представляет собой струю, вырывающуюся из начала координат и подсасывающую окружающую жидкость. Если условно считать границей струи поверхность с минимальным расстоянием ( $r \sin \theta$ ) линий тока от оси, то это будет поверхность конуса с углом раствора  $2\theta_0$ , где  $\cos \theta_0 = 1/A$ .

В предельном случае слабой струи (малые  $P$ , чему отвечают большие  $A$ ) имеем из (23,21)

$$P = 16\pi v^2 \rho / A.$$

Для скорости получаем в этом случае

$$v_\theta = - \frac{P}{8\pi \nu \rho} \frac{\sin \theta}{r}, \quad v_r = \frac{P}{4\pi \nu \rho} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (23,23)$$

В обратном случае сильной струи (большие  $P$ , чему отвечает  $A \rightarrow 1$ )<sup>1)</sup> имеем

$$A = 1 + \frac{\theta_0^2}{2}, \quad \theta_0^2 = \frac{64\pi\nu^2\rho}{3P}.$$

Для больших углов ( $\theta \approx 1$ ) распределение скоростей определяется формулами

$$v_\theta = -\frac{2\nu}{r} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad v_r = -\frac{2\nu}{r}, \quad (23,24)$$

а для малых углов ( $\theta \approx \theta_0$ ):

$$v_\theta = -\frac{4\nu\theta}{(\theta_0^2 + \theta^2)r}, \quad v_r = 8\nu \frac{\theta_0^2}{(\theta_0^2 + \theta^2)^2 r}. \quad (23,25)$$

Полученное здесь решение является точным для струи, рассматриваемой как бьющая из точечного источника. Если учитывать конечные размеры отверстия трубки, то это решение представляет собой первый член разложения по степеням отношения размеров отверстия к расстоянию  $r$  от него. С этим обстоятельством связан тот факт, что если вычислить по полученному решению полный поток жидкости, проходящей через замкнутую поверхность вокруг начала координат, то он окажется равным нулю. Отличный от нуля поток получился бы при учете следующих членов разложения по указанному отношению<sup>2)</sup>.

## § 24. Колебательное движение в вязкой жидкости

Движение, возникающее в вязкой жидкости при колебаниях погруженных в нее твердых тел, обладает рядом характерных особенностей. Для изучения этих особенностей удобно начать с рассмотрения простого типичного примера (*G. G. Stokes*, 1851). Пусть несжимаемая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей (в своей плоскости) простое гармоническое колебательное движение с частотой  $\omega$ . Требуется определить возникающее при этом в жидкости движение.

<sup>1)</sup> В действительности, однако, движение в достаточно сильной струе становится турбулентным (§ 36). Отметим, что роль числа Рейнольдса для рассмотренной струи играет безразмерный параметр  $(P/\rho\nu^2)^{1/2}$ .

<sup>2)</sup> См. *Румер Ю. Б.* — Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, с. 255.

Затопленная ламинарная струя с отличным от нуля моментом вращения вокруг оси рассмотрена *Лойцянский Л. Г.* — Прикл. мат. и мех., 1953, т. 17, с. 3.

Упомянем, что гидродинамические уравнения несжимаемой вязкой жидкости для любого стационарного осесимметричного движения, в котором скорость убывает с расстоянием как  $1/r$ , могут быть сведены к одному обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. См. *Слезкин Н. А.* — Уч. зап. МГУ, 1934, вып. II; Прикл. мат. и мех., 1954, т. 18, с. 764.