В обратном случае сильной струи (большие P, чему отвечает $A \to 1$)[1]) имеем

$$A = 1 + \frac{\theta_0^2}{2}, \quad \theta_0^2 = \frac{64\pi\nu^2\rho}{3P}.$$

Для больших углов ($\theta \approx 1$) распределение скоростей определяется формулами

$$v_\theta = -\frac{2\nu}{r}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, \quad v_r = -\frac{2\nu}{r}, \tag{23,24}$$

а для малых углов ($\theta \approx \theta_0$):

$$v_\theta = -\frac{4\nu\theta}{(\theta_0^2+\theta^2)\,r}, \quad v_r = 8\nu\frac{\theta_0^2}{(\theta_0^2+\theta^2)^2\,r}. \tag{23,25}$$

Полученное здесь решение является точным для струи, рассматриваемой как бьющая из точечного источника. Если учитывать конечные размеры отверстия трубки, то это решение представляет собой первый член разложения по степеням отношения размеров отверстия к расстоянию r от него. С этим обстоятельством связан тот факт, что если вычислить по полученному решению полный поток жидкости, проходящей через замкнутую поверхность вокруг начала координат, то он окажется равным нулю. Отличный от нуля поток получился бы при учете следующих членов разложения по указанному отношению[2]).

§ 24. Колебательное движение в вязкой жидкости

Движение, возникающее в вязкой жидкости при колебаниях погруженных в нее твердых тел, обладает рядом характерных особенностей. Для изучения этих особенностей удобно начать с рассмотрения простого типичного примера (*G. G. Stokes*, 1851). Пусть несжимаемая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей (в своей плоскости) простое гармоническое колебательное движение с частотой ω. Требуется определить возникающее при этом в жидкости движение.

[1]) В действительности, однако, движение в достаточно сильной струе становится турбулентным (§ 36). Отметим, что роль числа Рейнольдса для рассмотренной струи играет безразмерный параметр $(P/\rho\nu^2)^{1/2}$.

[2]) См. *Румер Ю. Б.* — Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, с. 255.

Затопленная ламинарная струя с отличным от нуля моментом вращения вокруг оси рассмотрена *Лойцянским Л. Г.* — Прикл. мат. и мех., 1953, т. 17, с. 3.

Упомянем, что гидродинамические уравнения несжимаемой вязкой жидкости для любого стационарного осесимметричного движения, в котором скорость убывает с расстоянием как $1/r$, могут быть сведены к одному обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. См. *Слезкин Н. А.* — Уч. зап. МГУ, 1934, вып. II; Прикл. мат. и мех., 1954, т. 18, с. 764.

Твердую поверхность выберем в качестве плоскости y, z; области жидкости соответствуют $x > 0$. Ось y выберем вдоль направления колебаний поверхности. Скорость u колеблющейся поверхности есть функция времени вида $A\cos(\omega t + \alpha)$. Удобно писать такую функцию в виде вещественной части от комплексного выражения: $u = \operatorname{Re}\{u_0 e^{-i\omega t}\}$ (с комплексной, вообще говоря, постоянной $u_0 = Ae^{-i\alpha}$; надлежащим выбором начала отсчета времени эту постоянную всегда можно сделать вещественной).

До тех пор, пока при вычислениях производятся только линейные операции над скоростью u, можно опускать знак взятия вещественной части и вычислять так, как если бы u было комплексным, после чего можно взять вещественную часть от окончательного результата. Таким образом, будем писать:

$$u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}. \tag{24,1}$$

Скорость жидкости должна удовлетворять граничному условию $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, т. е.

$$v_x = v_z = 0, \quad v_y = u$$

при $x = 0$.

Из соображений симметрии очевидно, что все величины будут зависеть только от координаты x (и от времени t). Из уравнения непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ имеем поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

откуда $v_x = \text{const}$, причем согласно граничным условиям эта постоянная должна быть равной нулю, т. е. $v_x = 0$. Поскольку все величины не зависят от координат y, z, и благодаря равенству v_x нулю имеем тождественно $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0$. Уравнение движения (15,7) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\mathbf{v}. \tag{24,2}$$

Это уравнение линейно. Его x-компонента дает $\partial p/\partial x = 0$, т. е. $p = \text{const}$.

Из симметрии очевидно также, что скорость $\mathbf{v}$ направлена везде по оси y. Для $v_y = v$ имеем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{24,3}$$

(типа одномерного уравнения теплопроводности). Будем искать периодическое по x и t решение вида

$$v = u_0 e^{i(kx - \omega t)},$$

удовлетворяющее условию $v = u$ при $x = 0$. Подстановка в уравнение дает

$$i\omega = \nu k^2, \quad k = \frac{1+i}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \tag{24,4}$$

так что скорость

$$v = u_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)} \qquad (24,5)$$

(выбор знака корня $\sqrt{i}$ в (24,4) определяется требованием затухания скорости в глубь жидкости).

Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны: скорость $v_y = v$ перпендикулярна направлению распространения волны. Они, однако, быстро затухают по мере удаления от создающей их колеблющейся твердой поверхности. Затухание амплитуды происходит по экспоненциальному закону с *глубиной проникновения* δ[1]). Эта глубина падает с увеличением частоты волны и растет с увеличением вязкости жидкости.

Действующая на твердую поверхность сила трения направлена, очевидно, по оси y. Отнесенная к единице площади, она равна

$$\sigma_{xy} = \eta \left.\frac{\partial v_y}{\partial x}\right|_{x=0} = \sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}}\,(i-1)\,u. \qquad (24,6)$$

Предполагая u_0 вещественным и отделив в (24,6) вещественную часть, получим:

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega\rho\eta}\,u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Скорость же колеблющейся поверхности есть $u = u_0 \cos \omega t$. Таким образом, между скоростью и силой трения имеется сдвиг фаз[2]).

Легко вычислить также и среднее (по времени) значение диссипации энергии при рассматриваемом движении. Это можно сделать по общей формуле (16,3); в данном случае, однако, проще вычислить искомую диссипацию непосредственно как работу сил трения. Именно, диссипация энергии в единицу времени, отнесенная к единице площади колеблющейся плоскости, равна среднему значению произведения силы σ_{xy} на скорость $u_y = u$:

$$-\overline{\sigma_{xy} u} = \frac{u_0^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}. \qquad (24,7)$$

---

[1]) На расстоянии δ амплитуда волны убывает в e раз, а на протяжении одного пространственного периода волны — в $e^{2\pi} \approx 540$ раз.

[2]) При колебаниях полуплоскости (параллельно линии своего края) возникает дополнительная сила трения, связанная с краевыми эффектами. Задача о движении вязкой жидкости при колебаниях полуплоскости (а также и более общая задача о колебаниях клина с произвольным углом раствора) может быть решена с помощью класса решений уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$, используемого в теории дифракции от клина. Мы отметим здесь лишь следующий результат: возникающее от краевого эффекта увеличение силы трения на полуплоскость может быть описано как результат увеличения площади при смещении края полуплоскости на расстояние $\delta/2$ с δ из (24,4) (*Л. Д. Ландау*, 1947).

Она пропорциональна корню из частоты колебаний и из вязкости жидкости.

Может быть решена в замкнутом виде также и общая задача о жидкости, приводимой в движении плоской поверхностью, движущейся (в своей плоскости) по произвольному закону $u = u(t)$. Мы не станем производить здесь соответствующие вычисления, так как искомое решение уравнения (24,3) формально совпадает с решением аналогичной задачи теории теплопроводности, которая будет рассмотрена в § 52 (и дается формулой (52,15)). В частности, испытываемая твердой поверхностью сила трения (отнесенная к единице площади) определяется формулой

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \qquad (24,8)$$

(ср. (52,14)).

Рассмотрим теперь общий случай колеблющегося тела произвольной формы. В изученном выше случае колебаний плоской поверхности член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении движения жидкости исчезал тождественно. Для поверхности произвольной формы это, конечно, уже не имеет места. Мы будем, однако, предполагать, что этот член мал по сравнению с другими членами, так что им все же можно пренебречь. Необходимые для возможности такого пренебрежения условия будут выяснены ниже.

Таким образом, будем исходить по-прежнему из линейного уравнения (24,2). Применим к обеим сторонам этого уравнения операцию rot. Член $\operatorname{rot}\operatorname{grad} p$ исчезает тождественно, так что мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nu\Delta\operatorname{rot}\mathbf{v}, \qquad (24,9)$$

т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению типа уравнения теплопроводности.

Но мы видели выше, что такое уравнение приводит к экспоненциальному затуханию описываемой им величины. Мы можем, следовательно, утверждать, что завихренность затухает по направлению в глубь жидкости. Другими словами, вызываемое колебаниями тела движение жидкости является вихревым в некотором слое вокруг тела, а на больших расстояниях быстро переходит в потенциальное движение. Глубина проникновения вихревого движения $\sim\delta$.

В связи с этим возможны два важных предельных случая. Величина δ может быть велика или мала по сравнению с размерами колеблющегося в жидкости тела. Пусть l — порядок величины этих размеров. Рассмотрим сначала случай $\delta \gg l$; это значит, что должно выполняться условие $l^2\omega \ll \nu$. Наряду с этим условием мы будем предполагать также, что число Рейнольдса мало. Если a — амплитуда колебаний тела, то его скорость — порядка величины $a\omega$. Поэтому число Рейнольдса для рассматриваемого движения есть $\omega a l/\nu$. Таким образом, предполагаем выполнение условий

$$l^2\omega \ll \nu, \quad \frac{\omega l a}{\nu} \ll 1. \tag{24,10}$$

Это — случай малых частот колебаний. Но малость частоты означает, что скорость медленно меняется со временем и потому в общем уравнении движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}$$

можно пренебречь производной $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Членом же $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь в силу малости числа Рейнольдса.

Отсутствие члена $\partial\mathbf{v}/\partial t$ в уравнении движения означает стационарность движения. Таким образом, при $\delta \gg l$ движение можно рассматривать в каждый данный момент времени как стационарное. Это значит, что движение жидкости в каждый данный момент такое же, каким оно было бы при равномерном движении тела со скоростью, которой оно в действительности обладает в данный момент. Если, например, речь идет о колебаниях погруженного в жидкость шара, с частотой, удовлетворяющей неравенствам (24,10) (где l есть теперь радиус шара), то можно поэтому утверждать, что испытываемая шаром сила сопротивления будет определяться формулой Стокса (20,14), полученной для равномерного движения шара при малых числах Рейнольдса.

Перейдем теперь к изучению противоположного случая, когда $l \gg \delta$. Для того чтобы можно было опять пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, необходимо в этом случае одновременное выполнение условия малости амплитуды колебаний тела по сравнению с его размерами

$$l^2\omega \gg \nu, \quad a \ll l \tag{24,11}$$

(заметим, что число Рейнольдса при этом отнюдь не должно быть малым). Действительно, оценим член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Оператор $(\mathbf{v}\nabla)$ означает дифференцирование вдоль направления скорости. Но вблизи поверхности тела скорость направлена в основном по касательной. В этом направлении скорость заметно меняется лишь на протяжении размеров тела. Поэтому $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \approx v^2/l \approx a^2\omega^2/l$ (сама скорость $v \approx a\omega$). Производная же $\partial\mathbf{v}/\partial t \approx v\omega \approx a\omega^2$. Сравнив оба выражения, видим, что при $a \ll l$ действительно $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \partial\mathbf{v}/\partial t$. Члены же $\partial\mathbf{v}/\partial t$ и $\nu\Delta\mathbf{v}$ имеют теперь, как легко убедиться, одинаковый порядок величины.

Рассмотрим теперь характер движения жидкости вокруг колеблющегося тела в случае выполнения условий (24,11). В тонком слое вблизи поверхности тела движение является вихревым.

В основной же массе жидкости движение потенциально[1]). Поэтому везде, кроме пристеночного слоя, движение жидкости описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{24,12}$$

Отсюда следует, что и $\Delta \mathbf{v} = 0$, а потому уравнение Навье — Стокса переходит в уравнение Эйлера. Таким образом, везде, кроме пристеночного слоя, жидкость движется как идеальная.

Поскольку пристеночный слой тонкий, то при решении уравнений (24,12) с целью определения движения в основной массе жидкости следовало бы взять в качестве граничных условий те условия, которые должны выполняться на поверхности тела, т. е. равенство скорости жидкости скорости тела. Однако решения уравнений движения идеальной жидкости не могут удовлетворить этим условиям. Можно потребовать лишь выполнения этого условия для нормальной к поверхности компоненты скорости жидкости.

Хотя уравнения (24,12) и неприменимы в пристеночном слое жидкости, но поскольку получающееся в результате их решения распределение скоростей уже удовлетворяет необходимым граничным условиям для нормальной компоненты скорости, то истинный ход этой компоненты вблизи поверхности не обнаружит каких-либо существенных особенностей. Что же касается касательной компоненты, то, решая уравнения (24,12), мы получили бы для нее некоторое значение, отличное от соответствующей компоненты скорости тела, между тем как эти скорости тоже должны быть равными. Поэтому в тонком пристеночном слое должно происходить быстрое изменение касательной компоненты скорости.

Легко определить ход этого изменения. Рассмотрим какой-нибудь участок поверхности тела, размеры которого велики по сравнению с δ, но малы по сравнению с размерами тела. Такой участок можно рассматривать приближенно как плоский и потому можно воспользоваться для него полученными выше для плоской поверхности результатами. Пусть ось x направлена по направлению нормали к расматриваемому участку поверхности, а ось y — по касательной к нему, совпадающей с направлением тангенциальной составляющей скорости элемента поверхности. Обозначим посредством v_y касательную компоненту скорости движения жидкости относительно тела; на самой поверхности v_y должно обратиться в нуль. Пусть, наконец, $v_0 e^{-i\omega t}$ есть значение v_y, получающееся в результате решения уравнений (24,12). На

[1]) При колебаниях плоской поверхности на расстоянии δ затухает не только $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, но и сама скорость $\mathbf{v}$. Это связано с тем, что плоскость при своих колебаниях не вытесняет жидкости и потому жидкость вдали от нее остается вообще неподвижной. При колебаниях же тел другой формы происходит вытеснение жидкости, в результате чего она приходит в движение, скорость которого заметно затухает лишь на расстояниях порядка размеров тела.

основании полученных в начале этого параграфа результатов мы можем утверждать, что в пристеночном слое величина v_y будет падать по направлению к поверхности по закону[1])

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t}\left[1 - e^{-(1-i)x\sqrt{\omega/2\nu}}\right]. \tag{24,13}$$

Наконец, полная диссипируемая в единицу времени энергия будет равна интегралу

$$\bar{\dot{E}}_{\text{кин}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}}\oint |v_0|^2\, df, \tag{24,14}$$

взятому по всей поверхности колеблющегося тела.

В задачах к этому параграфу вычислены силы сопротивления, действующие на различные тела, совершающие колебательное движение в вязкой жидкости. Сделаем здесь следующее общее замечание по поводу этих сил. Написав скорость движения тела в комплексном виде $u = u_0 e^{-i\omega t}$, мы получаем в результате силу сопротивления F, пропорциональную скорости u, тоже в комплексном виде $F = \beta u$, где $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ — комплексная постоянная; это выражение можно написать как сумму двух членов:

$$F = (\beta_1 + i\beta_2)\, u = \beta_1 u - \frac{\beta_2}{\omega}\dot{u}, \tag{24,15}$$

пропорциональных соответственно скорости u и ускорению $\dot{u}$ с вещественными коэффициентами.

Средняя (по времени) диссипация энергии определяется средним значением произведения силы сопротивления и скорости; при этом, разумеется, следует предварительно взять вещественные части написанных выше выражений, т. е. написать:

$$u = \frac{1}{2}\left(u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t}\right),$$

$$F = \frac{1}{2}\left(u_0 \beta e^{-i\omega t} + u_0^* \beta^* e^{i\omega t}\right).$$

Замечая, что средние значения от $e^{\pm 2i\omega t}$ равны нулю, получим:

$$\bar{\dot{E}}_{\text{кин}} = \overline{Fu} = \frac{1}{4}(\beta + \beta^*)\,|u_0|^2 = \frac{\beta_1}{2}|u_0|^2. \tag{24,16}$$

Таким образом, мы видим, что диссипация энергии связана только с вещественной частью величины β; соответствующую (пропорциональную скорости) часть силы сопротивления (24,15) можно назвать *диссипативной*. Вторую же часть этой силы, пропорциональную ускорению (определяющуюся мнимой частью β)

---

[1]) Распределение скоростей (24,13) написано в системе отсчета, в которой твердое тело покоится ($v_y = 0$ при $x = 0$) Поэтому в качестве v_0 надо брать решение задачи о потенциальном обтекании жидкостью неподвижного тела.

и не связанную с диссипацией энергии, можно назвать *инерционной*.

Аналогичные соображения относятся к моменту сил, действующих на тело, совершающее вращательные колебания в вязкой жидкости.

Задачи

1. Определить силу трения, действующую на каждую из двух параллельных твердых плоскостей, между которыми находится слой вязкой жидкости, причем одна из плоскостей совершает колебательное движение в своей плоскости.

Решение. Ищем решение уравнения (24,3) в виде[1])

$$v = (A \sin kx + B \cos kx)\, e^{-i\omega t}$$

и определяем A и B из условий $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$ при $x = 0$ и $v = 0$ при $x = h$ (h — расстояние между плоскостями). В результате получаем:

$$v = u \frac{\sin k(h - x)}{\sin kh}.$$

Сила трения (на единицу поверхности) на движущейся плоскости равна

$$P_{1y} = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = -ku\eta \operatorname{ctg} kh,$$

и на неподвижной

$$P_{2y} = -\eta \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=h} = \frac{\eta k u}{\sin kh}$$

(везде подразумеваются вещественные части соответствующих выражений).

2. Определить силу трения, действующую на колеблющуюся плоскость, покрытую слоем жидкости (толщины h), верхняя поверхность которого свободна.

Решение. Граничные условия на твердой плоскости: $v = u$ при $x = 0$, а на свободной поверхности $\sigma_{xy} = \eta\, \partial v/\partial x = 0$ при $x = h$. Скорость

$$v = u \frac{\cos k(h - x)}{\cos kh}.$$

Сила трения

$$P_y = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \eta u k \operatorname{tg} kh.$$

3. Плоский диск большого радиуса R совершает вращательные колебания вокруг своей оси с малой амплитудой (угол поворота диска $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, $\theta_0 \ll 1$); определить момент сил трения, действующих на диск.

Решение. Для колебаний с малой амплитудой член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении движения всегда мал по сравнению с $\partial \mathbf{v}/\partial t$ независимо от величины частоты ω. Если $R \gg \delta$, то при определении распределения скоростей плоскость диска можно считать неограниченной. Выбираем цилиндрические координаты с осью z по оси вращения и ищем решение в виде $v_r = v_z = 0$, $v_\varphi = v = r\Omega(z, t)$. Для угловой скорости жидкости $\Omega(z, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}.$$

---

[1]) Во всех задачах к этому параграфу k и δ определены согласно (24,4).

Решение этого уравнения, обращающееся в $-\omega\theta_0 \sin \omega t$ при $z = 0$ и в нуль при $z = \infty$, есть

$$\Omega = -\omega\theta_0 e^{-z/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right).$$

Момент сил трения, действующих на обе стороны диска, равен

$$M = 2\int_0^R r 2\pi r \eta \frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0} dr = \omega\theta_0 \pi \sqrt{\omega\rho\eta}\, R^4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Определить движение жидкости между двумя параллельными плоскостями при наличии градиента давления, меняющегося со временем по гармоническому закону.

Решение. Выбираем плоскость x, z посередине между обеими плоскостями; ось x направлена по градиенту давления, который пишем в виде

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = ae^{-i\omega t}.$$

Скорость направлена везде по оси x и определяется уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} = ae^{-i\omega t} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $v = 0$ при $y = \pm h/2$, есть

$$v = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}\left[1 - \frac{\cos ky}{\cos (kh/2)}\right].$$

Среднее (по сечению) значение скорости равно

$$\bar{v} = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}\left(1 - \frac{2}{kh}\operatorname{tg}\frac{kh}{2}\right).$$

При $h/\delta \ll 1$ это выражение переходит в

$$\bar{v} \approx ae^{-i\omega t}\frac{h^2}{12\nu}$$

в согласии с (17,5), а при $h/\delta \gg 1$ получается

$$\bar{v} \approx \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}$$

в соответствии с тем, что в этом случае скорость должна быть почти постоянной вдоль сечения и заметно меняется лишь в узком пристеночном слое.

5. Определить силу сопротивления, испытываемую шаром (радиуса R), совершающим в жидкости колебательное поступательное движение.

Решение. Скорость шара пишем в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$. Аналогично тому, как мы поступали в § 20, ищем скорость жидкости в виде

$$\mathbf{v} = e^{-i\omega t} \operatorname{rot}\operatorname{rot} f\mathbf{u}_0,$$

где f — функция только от r (начало координат выбираем в точке нахождения центра шара в данный момент времени). Подставляя в (24,9) и производя преобразования, аналогичные произведенным в § 20, получаем уравнение

$$\Delta^2 f + \frac{i\omega}{\nu}\Delta f = 0$$

(вместо уравнения $\Delta^2 f = 0$ в § 20). Отсюда имеем:

$$\Delta f = \mathrm{const}\,\frac{e^{ikr}}{r};$$

решение выбрано экспоненциально затухающее, а не возрастающее с r. Интегрируя, получаем:

$$\frac{df}{dr} = a\,\frac{e^{ikr}}{r^2}\left(r - \frac{1}{ik}\right) + \frac{b}{r^2} \tag{1}$$

(самую функцию f можно не выписывать, так как в скорость входят только производные f' и f''). Постоянные a и b определяются из условия $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ при $r = R$ и оказываются равными

$$a = -\frac{3R}{2ik}e^{-ikR}, \qquad b = -\frac{R^3}{2}\left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2R^2}\right). \tag{2}$$

Отметим, что при больших частотах ($R \gg \delta$) $a \to 0$, $b \to -R^3/2$, что соответствует (в согласии с утверждениями § 24) потенциальному движению (определенному в задаче 2 § 10).

Сила сопротивления вычисляется по формуле (20,13), в которой интегрирование производится по поверхности шара. Результат:

$$F = 6\pi\eta R\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)u + 3\pi R^2\sqrt{\frac{2\eta\rho}{\omega}}\left(1 + \frac{2R}{9\delta}\right)\frac{du}{dt}. \tag{3}$$

При $\omega = 0$ эта формула переходит в формулу Стокса. При больших же частотах получается:

$$F = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\frac{du}{dt} + 3\pi R^2\sqrt{2\eta\rho\omega}\,u$$

Первый член в этом выражении соответствует инерционной силе при потенциальном обтекании шара (см. задачу 1 § 11), а второй дает предельное выражение для диссипативной силы. Этот второй член можно было бы найти и путем вычисления диссипируемой энергии по формуле (24,14) (ср. следующую задачу).

6. Найти предельное (при больших частотах, $\delta \ll R$) выражение диссипативной силы сопротивления, действующей на бесконечный цилиндр (радиуса R), совершающий колебания в направлении перпендикулярном своей оси.

Решение. Распределение скоростей вокруг обтекаемого в поперечном направлении неподвижного цилиндра дается формулой

$$v = \frac{R^2}{r^2}\left[2\mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n}) - \mathbf{u}\right] - \mathbf{u}$$

(см. задачу 3 к § 10). Отсюда находим для тангенциальной скорости на поверхности цилиндра:

$$v_0 = -2u\sin\varphi$$

(r, φ — полярные координаты в поперечной плоскости; угол φ отсчитывается от направления $\mathbf{u}$) По (24,14) находим диссипируемую энергию (отнесенную к единице длины цилиндра):

$$\bar{\dot{E}}_{\text{кин}} = \pi u^2 R\sqrt{2\rho\eta\omega}$$

Сравнение с формулами (24,15—16) дает для искомой силы:

$$F_{\text{дисс}} = 2\pi R u\sqrt{2\rho\eta\omega}$$

7. Определить силу сопротивления, действующую на произвольно движущийся шар (скорость шара есть заданная функция времени $u = u(t)$).

Решение. Разлагаем $u(t)$ в интеграл Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_\omega e^{-i\omega t}\,d\omega, \qquad u_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\,e^{i\omega t}\,d\tau.$$

В силу линейности уравнений полная сила сопротивления может быть написана в виде интеграла от сил сопротивления, получающихся при движении со скоростями, равными отдельным компонентам Фурье $u_\omega e^{-i\omega t}$; эти силы определяются выражением (3) задачи 5 и равны

$$\pi\rho R^3 u_\omega e^{-i\omega t}\left\{\frac{6\nu}{R^2} - \frac{2i\omega}{3} + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(1-i)\sqrt{\omega}\right\}.$$

Замечая, что $\left(\frac{du}{dt}\right)_\omega = -i\omega u_\omega$, переписываем это в виде

$$\pi\rho R^3 e^{-i\omega t}\left\{\frac{6\nu}{R^2}u_\omega + \frac{2}{3}(\dot u)_\omega + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(\dot u)_\omega\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}\right\}.$$

При интегрировании по $d\omega/2\pi$ в первом и втором членах получаем соответственно $u(t)$ и $\dot u(t)$. Для интегрирования третьего члена раньше всего замечаем, что для отрицательных ω надо писать этот член в комплексно сопряженном виде, написав в нем $\frac{1-i}{\sqrt{|\omega|}}$ вместо $\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}$ (это связано с тем, что полученная в задаче 5 формула (3) выведена для скорости $u = u_0 e^{-i\omega t}$ с положительным ω; для скорости же $u_0 e^{i\omega t}$ получилась бы комплексно сопряженная величина). Поэтому вместо интеграла по $d\omega$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ можно написать удвоенную вещественную часть интеграла от 0 до $+\infty$. Пишем:

$$\frac{2}{2\pi}\operatorname{Re}\left\{(1+i)\int_0^\infty \frac{(\dot u)_\omega e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{(1+i)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty \frac{\dot u(\tau)\,e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega\,d\tau\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{(1+i)\int_{-\infty}^{t}\int_0^\infty \frac{\dot u(\tau)\,e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega\,d\tau + \right.$$

$$\left. + (1+i)\int_t^\infty\int_0^\infty \frac{\dot u(\tau)\,e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega\,d\tau\right\} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + i\int_t^\infty \frac{\dot u(\tau)}{\sqrt{\tau-t}}\,d\tau\right\} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot u(t)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для силы сопротивления

$$F = 2\pi\rho R^3 \left\{\frac{1}{3}\frac{du}{dt} + \frac{3\nu}{R^2}u + \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right\}. \qquad (4)$$

8. Определить силу сопротивления для шара, начинающего в момент $t = 0$ двигаться равноускоренно по закону $u = \alpha t$.

Решение. Полагая в формуле (4) задачи 7 $u = 0$ при $t < 0$ и $u = \alpha t$ при $t > 0$, получаем (при $t > 0$):

$$F = 2\pi\rho R^3\alpha\left\{\frac{1}{3} + \frac{3\nu}{R^2}t + \frac{6}{R}\left(\frac{\nu t}{\pi}\right)^{1/2}\right\}.$$

9. То же для шара, мгновенно приведенного в равномерное движение.

Решение. Имеем $u = 0$ при $t < 0$ и $u = u_0$ при $t > 0$. Производная du/dt равна нулю всегда, кроме момента $t = 0$, в который она обращается в бесконечность, причем так, что интеграл от du/dt по времени конечен и равен u_0. В результате получаем для всего времени $t > 0$

$$F = 6\pi\rho\nu R u_0\left\{1 + \frac{R}{\sqrt{\pi\nu t}}\right\} + \frac{2\eta\rho R^3}{3}u_0\delta(t);$$

здесь $\delta(t)$ есть δ-функция. При $t \to \infty$ это выражение асимптотически приближается к значению, даваемому формулой Стокса. Импульс силы сопротивления, испытываемый шаром в течение бесконечно малого интервала времени вокруг $t = 0$, получается интегрированием по времени последнего члена в F и равен $2\pi\rho R^3 u_0/3$.

10. Определить момент сил, действующих на шар, совершающий в вязкой жидкости вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Решение. По тем же причинам, что и в задаче 1 § 20, в уравнении движения можно не писать члена с градиентом давления, так что имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu\,\Delta\mathbf{v}.$$

Ищем решение в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} f\boldsymbol{\Omega}_0 e^{-i\omega t},$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 e^{-i\omega t}$ — угловая скорость вращения шара. Для f получаем теперь вместо уравнения $\Delta f = \text{const}$ следующее уравнение:

$$\Delta f + k^2 f = \text{const}.$$

Опуская несущественный постоянный член в решении этого уравнения, имеем отсюда $f = \frac{a}{r}e^{ikr}$ (выбирается решение, которое обращается на бесконечности в нуль). Постоянную a определяем из предельного условия $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$ на поверхности шара и в результате получаем:

$$f = \frac{R^3}{r(1-ikR)}e^{ik(r-R)}, \qquad \mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]\left(\frac{R}{r}\right)^3\frac{1-ikr}{1-ikR}e^{ik(r-R)}$$

(R — радиус шара). Вычисление, аналогичное произведенному в задаче 1 § 20, приводит к следующему выражению для момента сил, действующих на шар со стороны жидкости:

$$M = -\frac{8\pi}{3}\eta R^3\boldsymbol{\Omega}\,\frac{3 + 6R/\delta + 6(R/\delta)^2 + 2(R/\delta)^3 - 2i(R/\delta)^2(1 + R/\delta)}{1 + 2R/\delta + 2(R/\delta)^2}.$$

При $\omega \to 0$ (т. е. $\delta \to \infty$) получается выражение $M = -8\pi\eta R^3\Omega$, соответствующее равномерному вращению шара (см. задачу 1 § 20). В обратном же предельном случае $R/\delta \gg 1$ получается:

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi R^4 \sqrt{\eta\rho\omega}\,(i-1)\,\Omega\,.$$

Это выражение можно получить и непосредственным путем: при $\delta \ll R$ каждый элемент поверхности шара можно рассматривать как плоский, а действующую на него силу трения определить по формуле (24,6), подставив в нее скорость $u = \Omega R \sin\theta$.

11. Определить момент сил, действующих на наполненный вязкой жидкостью полый шар, совершающий вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Решение. Ищем скорость в том же виде, как и в предыдущей задаче. Для f берем решение, конечное во всем объеме внутри шара, включая его центр: $f = a\dfrac{\sin kr}{r}$. Определяя a из граничного условия, получаем:

$$\mathbf{v} = [\Omega \mathbf{r}]\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{rk\cos kr - \sin kr}{Rk\cos kR - \sin kR}\,.$$

Вычисление момента сил трения приводит к выражению

$$M = \frac{8}{3}\pi\eta R^3\Omega\,\frac{k^2R^2\sin kR + 3kR\cos kR - 3\sin kR}{kR\cos kR - \sin kR}\,.$$

Предельное выражение при $R/\delta \gg 1$ совпадает, естественно, с соответствующим выражением предыдущей задачи. Если же $R/\delta \ll 1$, то

$$M = \frac{8}{15}\pi\rho\omega R^5\Omega\left(i - \frac{R^2\omega}{35\nu}\right).$$

Первый член в этой формуле соответствует инерционным силам, возникающим при вращении всей массы жидкости как целого.

§ 25. Затухание гравитационных волн

Рассуждения, аналогичные вышеизложенным, могут быть проведены по поводу распределения скоростей вблизи свободной поверхности жидкости. Рассмотрим колебательное движение, происходящее у поверхности жидкости (например, гравитационные волны). Предположим, что выполняются условия (24,11), в которых теперь роль размеров l играет длина волны λ:

$$\lambda^2\omega \gg \nu,\quad a \ll \lambda \tag{25,1}$$

(a — амплитуда волны, ω — ее частота). Тогда можно утверждать, что решение будет вихревым лишь в тонком слое у поверхности жидкости, а в основном ее объеме движение будет потенциальным — таким, каким оно было бы у идеальной жидкости.

Движение вязкой жидкости должно удовлетворять у свободной поверхности граничным условиям (15,16), требующим исчезновения определенных комбинаций производных от скорости по координатам. Движение же, получающееся в результате решения уравнений гидродинамики идеальной жидкости, этому усло-