При $\omega \to 0$ (т.е. $\delta \to \infty$) получается выражение $M = -8\pi\eta R^3\Omega$, соответствующее равномерному вращению шара (см. задачу 1 § 20). В обратном же предельном случае $R/\delta \gg 1$ получается:

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi R^4 \sqrt{\eta\rho\omega}\,(i-1)\,\Omega\,.$$

Это выражение можно получить и непосредственным путем: при $\delta \ll R$ каждый элемент поверхности шара можно рассматривать как плоский, а действующую на него силу трения определить по формуле (24,6), подставив в нее скорость $u = \Omega R \sin\theta$.

11. Определить момент сил, действующих на наполненный вязкой жидкостью полый шар, совершающий вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Решение. Ищем скорость в том же виде, как и в предыдущей задаче. Для f берем решение, конечное во всем объеме внутри шара, включая его центр: $f = a\dfrac{\sin kr}{r}$. Определяя a из граничного условия, получаем:

$$\mathbf{v} = [\Omega\mathbf{r}]\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{rk\cos kr - \sin kr}{Rk\cos kR - \sin kR}\,.$$

Вычисление момента сил трения приводит к выражению

$$M = \frac{8}{3}\pi\eta R^3\Omega\,\frac{k^2R^2\sin kR + 3kR\cos kR - 3\sin kR}{kR\cos kR - \sin kR}\,.$$

Предельное выражение при $R/\delta \gg 1$ совпадает, естественно, с соответствующим выражением предыдущей задачи. Если же $R/\delta \ll 1$, то

$$M = \frac{8}{15}\pi\rho\omega R^5\Omega\left(i - \frac{R^2\omega}{35\nu}\right).$$

Первый член в этой формуле соответствует инерционным силам, возникающим при вращении всей массы жидкости как целого.

§ 25. Затухание гравитационных волн

Рассуждения, аналогичные вышеизложенным, могут быть проведены по поводу распределения скоростей вблизи свободной поверхности жидкости. Рассмотрим колебательное движение, происходящее у поверхности жидкости (например, гравитационные волны). Предположим, что выполняются условия (24,11), в которых теперь роль размеров l играет длина волны λ:

$$\lambda^2\omega \gg \nu,\quad a \ll \lambda \tag{25,1}$$

(a — амплитуда волны, ω — ее частота). Тогда можно утверждать, что решение будет вихревым лишь в тонком слое у поверхности жидкости, а в основном ее объеме движение будет потенциальным — таким, каким оно было бы у идеальной жидкости.

Движение вязкой жидкости должно удовлетворять у свободной поверхности граничным условиям (15,16), требующим исчезновения определенных комбинаций производных от скорости по координатам. Движение же, получающееся в результате решения уравнений гидродинамики идеальной жидкости, этому услонию не удовлетворяет. Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для скорости v_y, мы можем заключить, что в тонком слое у поверхности жидкости соответствующие производные скорости будут быстро уменьшаться. Существенно отметить, что градиент скорости не будет при этом аномально большим, как это имело место вблизи твердой поверхности.

Вычислим диссипацию энергии в гравитационной волне. Здесь надо говорить не о диссипации кинетической энергии, а о диссипации механической энергии $E_{мех}$, включающей в себя наряду с кинетической также и потенциальную энергию в поле тяжести. Ясно, однако, что на обусловленную процессами внутреннего трения в жидкости диссипацию энергии не может влиять факт наличия или отсутствия поля тяжести. Поэтому $\dot{E}_{мех}$ определяется той же формулой (16,3):

$$\dot{E}_{мех} = -\frac{\eta}{2}\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV.$$

При вычислении этого интеграла для гравитационной волны надо заметить, что поскольку объем поверхностного слоя вихревого движения мал, а градиент скорости в нем не аномально велик, фактом наличия этого слоя можно пренебречь, в противоположность тому, что мы имели в случае колебаний твердой поверхности. Другими словами, интегрирование должно производиться по всему объему жидкости, в котором, как мы видели, жидкость движется как идеальная.

Но движение в гравитационной волне в идеальной жидкости было уже нами определено в § 12. Это движение потенциально, и потому

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\,\partial x_i} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

так что

$$\dot{E}_{мех} = -2\eta\int\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)^2 dV.$$

Потенциал φ имеет вид

$$\varphi = \varphi_0\cos(kx-\omega t+\alpha)e^{kz}.$$

Нас интересует, конечно, не мгновенное, а среднее по времени значение диссипируемой энергии. Замечая, что средние значения квадратов косинуса и синуса одинаковы, получим:

$$\bar{\dot{E}}_{мех} = -8\eta k^4\int\overline{\varphi^2}\,dV. \tag{25,2}$$

Что касается самой энергии гравитационной волны, то для ее вычисления можно воспользоваться известным из механики обстоятельством, что у всякой системы, совершающей малые колебания (колебания с малой амплитудой), средняя кинетическая и потенциальная энергии равны друг другу. На этом основании можно написать $\bar{E}_{\text{мех}}$ просто как удвоенную кинетическую энергию:

$$\bar{E}_{\text{мех}} = \rho \int \overline{v^2}\, dV = \rho \int \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2} dV,$$

откуда

$$\bar{E}_{\text{мех}} = 2\rho k^2 \int \overline{\varphi^2}\, dV. \tag{25,3}$$

Затухание волн удобно характеризовать *коэффициентом затухания* γ, определенным как отношение

$$\gamma = |\dot{\bar{E}}_{\text{мех}}|/2\bar{E}. \tag{25,4}$$

С течением времени энергия волны падает по закону $\bar{E} = \text{const}\, e^{-2\gamma t}$; что касается амплитуды волны, то, поскольку энергия пропорциональна ее квадрату, закон ее уменьшения со временем определяется множителем $e^{-\gamma t}$.

С помощью (25,2—3) находим:

$$\gamma = 2\nu k^2. \tag{25,5}$$

Подставляя сюда (12,7), получим коэффициент затухания гравитационных волн в виде

$$\gamma = \frac{2\nu\omega^4}{g^2}. \tag{25,6}$$

Задачи

1. Определить коэффициент затухания длинных гравитационных волн, распространяющихся в канале постоянного сечения; частота предполагается настолько большой, что $\sqrt{\nu/\omega}$ мало по сравнению с глубиной жидкости в канале и его шириной.

Решение. Основная диссипация энергии будет происходить в пристеночном слое жидкости, где скорость меняется от нуля на самой стенке до значения $v = v_0 e^{-i\omega t}$ которое она имеет в волне. Средняя диссипация энергии (отнесенная к единице длины канала) равна согласно (24,14)

$$l \frac{|v_0|^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\eta\rho\omega};$$

l — длина той части контура сечения канала, вдоль которой он соприкасается с жидкостью. Средняя же энергия жидкости (тоже отнесенная к единице длины канала) равна $S\rho\overline{v^2} = S\rho\,|v_0|^2/2$ (S — площадь сечения жидкости в канале). Коэффициент затухания равен

$$\gamma = \frac{l}{2\sqrt{2}\,S}\sqrt{\nu\omega}.$$

Так, для канала прямоугольного сечения (ширина a, глубина жидкости h)

$$\gamma = \frac{2h + a}{2\sqrt{2}\,ah}\sqrt{\nu\omega}.$$

2. Определить движение в гравитационной волне на жидкости с большой вязкостью ($\nu \gtrsim \omega\lambda^2$).

Решение. Приведенное в тексте вычисление коэффициента затухания применимо только в случаях, когда этот коэффициент мал ($\gamma \ll \omega$), так что движение можно рассматривать в первом приближении как движение идеальной жидкости. При произвольной вязкости ищем решение уравнений движения

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,$$

зависящее от t и x как $e^{-i\omega t+ikx}$ и затухающее с z по направлению в глубь жидкости ($z>0$). Получаем:

$$v_x=e^{-i\omega t+ikx}(Ae^{kz}+Be^{mz}),$$

$$v_z=e^{-i\omega t+ikx}\left(-iAe^{kz}-i\frac{k}{m}Be^{mz}\right),$$

$$\frac{p}{\rho}=e^{-i\omega t+ikx}\frac{\omega}{k}Ae^{kz}-gz, \quad \text{где } m=\sqrt{k^2-i\frac{\omega}{\nu}}.$$

Граничные условия на поверхности жидкости:

$$\sigma_{zz}=-p+2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \qquad \sigma_{xz}=\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=0$$

(при $z=\zeta$). Во втором из этих условий можно сразу написать $z=0$ вместо $z=\zeta$. Первое же дифференцируем предварительно по t и пишем gv_z вместо $g\,\partial\zeta/\partial t$, после чего полагаем $z=0$. Из условия совместности получающихся таким образом двух однородных уравнений для A и B получаем:

$$\left(2-i\frac{\omega}{\nu k^2}\right)^2+\frac{g}{\nu^2k^3}=4\sqrt{1-i\frac{\omega}{\nu k^2}}. \qquad (1)$$

Это уравнение определяет зависимость ω от волнового вектора k. При этом ω является комплексной величиной; ее действительная часть определяет частоту колебаний, а мнимая — коэффициент затухания. Физический смысл имеют те из решений уравнения (1), мнимая часть которых отрицательна (соответственно затуханию волны); таковыми являются только два из корней уравнения (2). Если $\nu k^2 \ll \sqrt{gk}$ (условие (25,1)), то коэффициент затухания мал и (2) дает приближенно $\omega=\pm\sqrt{gk}-i\cdot 2\nu k^2$ — известный уже нам результат. В противоположном предельном случае $\nu k^2 \gg \sqrt{gk}$ уравнение (1) имеет два чисто мнимых корня, соответствующих чисто затухающему апериодическому движению. Один из корней есть

$$\omega=-\frac{ig}{2\nu k},$$

а другой значительно больше (порядка νk^2) и поэтому не интересен (соответствующее ему движение быстро затухает).