ГЛАВА III

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 26. Устойчивость стационарного движения жидкости

Для всякой задачи о движении вязкой жидкости в заданных стационарных условиях должно, в принципе, существовать точное стационарное решение уравнений гидродинамики. Эти решения формально существуют при любых числах Рейнольдса. Но не всякое решение уравнений движения, даже если оно является точным, может реально осуществиться в природе. Осуществляющиеся в природе движения должны не только удовлетворять гидродинамическим уравнениям, но должны еще быть устойчивыми: малые возмущения, раз возникнув, должны затухать со временем. Если же, напротив, неизбежно возникающие в потоке жидкости сколь угодно малые возмущения стремятся возрасти со временем, то движение неустойчиво и фактически существовать не может[1]).

Математическое исследование устойчивости движения по отношению к бесконечно малым возмущениям должно происходить по следующей схеме. На исследуемое стационарное решение (распределение скоростей, в котором пусть будет $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$) накладывается нестационарное малое возмущение $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$, которое должно быть определено таким образом, чтобы результирующее движение $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ удовлетворяло уравнениям движения. Уравнение для определения $\mathbf{v}_1$ получается подстановкой в уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{26,1}$$

скорости и давления в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + p_1, \tag{26,2}$$

причем известные функции $\mathbf{v}_0$ и p_0 удовлетворяют уравнениям

$$(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}_0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_0 = 0. \tag{26,3}$$

---

[1]) В предыдущем издании этой книги неустойчивость по отношению к сколь угодно малым возмущениям называлась абсолютной. Мы опускаем теперь в этом аспекте прилагательное «абсолютная», сохранив его (в соответствии с более принятой в современной литературе терминологией) в качестве антитезы к понятию о конвективной неустойчивости (§ 28).

Опуская члены высших порядков по малой величине $\mathbf{v}_1$, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\,\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\nabla)\,\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu\,\Delta\mathbf{v}_1, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0. \quad (26{,}4)$$

Граничным условием является исчезновение $\mathbf{v}_1$ на неподвижных твердых поверхностях.

Таким образом, $\mathbf{v}_1$ удовлетворяет системе однородных линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями только от координат, но не от времени. Общее решение таких уравнений может быть представлено в виде суммы частных решений, в которых $\mathbf{v}_1$ зависит от времени посредством множителей типа $e^{-i\omega t}$. Сами частоты ω возмущений не произвольны, а определяются в результате решений уравнений (26,4) с соответствующими предельным условиями. Эти частоты, вообще говоря, комплексны. Если имеются такие ω, мнимая часть которых положительна, то $e^{-i\omega t}$ будет неограниченно возрастать со временем. Другими словами, такие возмущения, раз возникнув, будут возрастать, т. е. движение будет неустойчиво по отношению к ним. Для устойчивости движения необходимо, чтобы у всех возможных частот ω мнимая часть была отрицательна. Тогда возникающие возмущения будут экспоненциально затухать со временем.

Такое математическое исследование устойчивости, однако, крайне сложно. До настоящего времени не разработан теоретически вопрос об устойчивости стационарного обтекания тел конечных размеров. Нет сомнения в том, что при достаточно малых числах Рейнольдса стационарное обтекание устойчиво. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при увеличении R достигается в конце концов определенное его значение (которое называют критическим, $R_{кр}$), начиная с которого движение становится неустойчивым, так что при достаточно больших числах Рейнольдса ($R > R_{кр}$) стационарное обтекание твердых тел вообще невозможно. Критическое значение числа Рейнольдса не является, разумеется, универсальным; для каждого типа движения существует свое $R_{кр}$. Эти значения, по-видимому, — порядка нескольких десятков (так, при поперечном обтекании цилиндра незатухающее нестационарное движение наблюдалось уже при $R = ud/\nu \approx 30$, где d — диаметр цилиндра).

Обратимся к изучению характера того нестационарного движения, которое устанавливается в результате неустойчивости стационарного движения при больших числах Рейнольдса (*Л. Д. Ландау*, 1944).

Начнем с выяснения свойств этого движения при R, лишь немногим превышающих $R_{кр}$. При $R < R_{кр}$ у комплексных частот $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ всех возможных малых возмущений мнимая часть отрицательна ($\gamma_1 < 0$). При $R = R_{кр}$ появляется одна частота, мнимая часть которой обращается в нуль. При $R > R_{кр}$

у этой частоты $\gamma_1 > 0$, причем для R, близких к критическому, $\gamma_1 \ll \omega_1$ [1]). Функция $\mathbf{v}_1$, соответствующая этой частоте, имеет вид:

$$\mathbf{v}_1 = A(t)\mathbf{f}(x, y, z), \qquad (26,5)$$

где $\mathbf{f}$ — некоторая комплексная функция координат, а комплексная амплитуда [2])

$$A(t) = \mathrm{const} \cdot e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t}. \qquad (26,6)$$

Это выражение для $A(t)$ в действительности пригодно лишь в течение короткого промежутка времени после момента срыва стационарного режима: множитель $\exp(\gamma_1 t)$ быстро растет, между тем как описанный выше метод определения $\mathbf{v}_1$, приводящий к выражению вида (26,5—6), применим лишь при достаточной малости $\mathbf{v}_1$. В действительности, конечно, модуль $|A|$ амплитуды нестационарного движения не растет неограниченно, а стремится к некоторому конечному пределу. При R, близких к $\mathrm{R}_{\text{кр}}$, этот конечный предел все еще мал, и для его определения поступим следующим образом.

Определим производную по времени от квадрата амплитуды $|A|^2$. Для самых малых времен, когда еще применимо (26,6), имеем

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2.$$

Это выражение является, по существу, лишь первым членом разложения в ряд по степеням A и A^*. При увеличении модуля $|A|$ (но когда он все еще остается малым) надо учесть следующие члены этого разложения. Ближайшие следующие — члены третьего порядка по A. Нас, однако, интересует не точное значение производной, а ее среднее по времени значение, причем усреднение производится по промежуткам времени, большим по сравнению с периодом $2\pi/\omega_1$ периодического множителя $\exp(-i\omega_1 t)$ (напомним, что, поскольку $\omega_1 \gg \gamma_1$, этот период мал по сравнению с временем $1/\gamma_1$ заметного изменения модуля $|A|$). Но члены третьего порядка непременно содержат периодический множитель и при усреднении выпадают [3]). Среди чле-

[1]) Спектр всех возможных (для данного типа движений) частот возмущений содержит как изолированные значения (дискретный спектр), так и значения, непрерывно заполняющие целые интервалы (непрерывный спектр). Можно думать, что для обтекания конечных тел частоты с $\gamma_1 > 0$ могут иметься только в дискретном спектре. Дело в том, то возмущения, отвечающие частотам непрерывного спектра, вообще говоря, не исчезают на бесконечности. Между тем на бесконечности основное движение представляет собой заведомо устойчивый плоскопараллельный однородный поток.

[2]) Как обычно, подразумевается вещественная часть выражения (26,6).

[3]) Строго говоря, члены третьего порядка дают при усреднении не нуль, а величины четвертого порядка; мы предполагаем их включенными в члены четвертого порядка в разложении.

нов же четвертого порядка есть член, пропорциональный $A^2A^{*2} = |A|^4$, при усреднении не выпадающий. Таким образом, с точностью до членов четвертого порядка имеем

$$\overline{\frac{d\,|A|^2}{dt}} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4, \tag{26,7}$$

где α — положительная или отрицательная постоянная (*постоянная Ландау*).

Нас интересует ситуация, когда при $R > R_{кр}$ впервые становится неустойчивым (на фоне основного движения) уже сколь угодно малое возмущение. Ей отвечает случай $\alpha > 0$; рассмотрим его.

Над $|A|^2$ и $|A|^4$ в (26,7) мы не пишем знаков усреднения, так как оно производится только по промежуткам времени, малым по сравнению с $1/\gamma_1$. По этой же причине при решении этого уравнения надо поступать так, как если бы черты над производной в левой его части тоже не было. Решение уравнения (26,7) имеет вид:

$$|A|^{-2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const} \cdot e^{-2\gamma_1 t}.$$

Отсюда видно, что $|A|^2$ асимптотически стремится к конечному пределу

$$|A|^2_{max} = 2\gamma_1/\alpha. \tag{26,8}$$

Величина γ_1 зависит от R; вблизи $R_{кр}$ функция $\gamma_1(R)$ может быть разложена по степеням $R - R_{кр}$. Но $\gamma_1(R_{кр}) = 0$ по самому определению критического числа Рейнольдса; поэтому приближенно имеем

$$\gamma_1 = \text{const} \cdot (R - R_{кр}). \tag{26,9}$$

Подставив это в (26,8), находим следующую зависимость устанавливающейся амплитуды возмущения от «степени надкритичности»:

$$|A|_{max} \sim (R - R_{кр})^{1/2}. \tag{26,10}$$

Остановимся кратко на случае, когда в уравнении (26,7) $\alpha < 0$. Для определения предельной амплитуды возмущения два члена разложения (26,7) теперь недостаточны, и надо учесть отрицательный член более высокого порядка; пусть это будет член $-\beta|A|^6$ с $\beta > 0$. Тогда

$$|A|^2_{max} = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \left[\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta}\gamma_1\right]^{1/2} \tag{26,11}$$

с γ_1 из (26,9). Эта зависимость изображена на рис. 13, *б* (рис. 13, *а* отвечает случаю $\alpha > 0$, формула (26,10)). При $R > R_{кр}$ стационарное движение не может существовать вовсе;

при $R = R_{кр}$ возмущение скачком возрастает до конечной амплитуды (которая, конечно, предполагается все же настолько малой, что используемое разложение по степеням $|A|^2$ применимо)[1]. В интервале $R'_{кр} < R < R_{кр}$ основное движение *метастабильно* — устойчиво по отношению к бесконечно малым, но неустойчиво по отношению к возмущениям конечной амплитуды (сплошная линия; пунктирная кривая ветвь неустойчива).

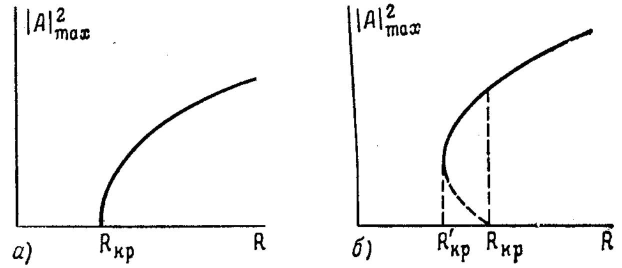

Рис. 13

Вернемся к нестационарному движению, возникающему при $R > R_{кр}$ в результате неустойчивости по отношению к малым возмущениям. При R, близких к $R_{кр}$, это движение может быть представлено в виде наложения стационарного движения $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ и периодического движения $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ с малой, но конечной амплитудой, растущей по мере увеличения R по закону (26,10). Распределение скоростей в этом движении имеет вид

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{r})\, e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}, \tag{26,12}$$

где $\mathbf{f}$ — комплексная функция координат, а β_1 — некоторая начальная фаза. При больших разностях $R - R_{кр}$ разделение скорости на две части $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ уже не имеет смысла. Мы имеем при этом дело просто с некоторым периодическим движением с частотой ω_1. Если вместо времени пользоваться в качестве независимой переменной фазой $\varphi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$, то можно сказать, что функция $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \varphi)$ является периодической функцией от φ с периодом 2π. Эта функция, однако, не есть теперь простая тригонометрическая. В ее разложение в ряд Фурье

$$\mathbf{v} = \sum_p \mathbf{A}_p(\mathbf{r})\, e^{-i\varphi_1 p} \tag{26,13}$$

(суммирование по всем положительным и отрицательным целым числам p) входят члены не только с основной частотой ω_1, но и с кратными ей.

---

[1]) В механике о таких системах говорят как о системах с *жестким* самовозбуждением, в отличие от систем с *мягким* самовозбуждением, неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Уравнением (26,7) определяется только абсолютная величина временного множителя $A(t)$, но не его фаза φ_1. Последняя остается по существу неопределенной и зависит от случайных начальных условий. В зависимости от этих условий, начальная фаза β_1 может иметь любое значение. Таким образом, изучаемое периодическое движение не определяется однозначно теми заданными стационарными внешними условиями, в которых оно происходит. Одна из величин — начальная фаза скорости — остается произвольной. Можно сказать, что это движение обладает одной степенью свободы, между тем как стационарное движение, полностью определяющееся внешними условиями, не обладает степенями свободы вовсе.

Задача

Вывести уравнение, выражающее баланс энергии между основным течением и наложенным на него возмущением, не предполагая последнее слабым.

Решение. Подставив (26,2) в уравнение (26,1), но не опустив в нем член второго порядка по $\mathbf{v}_1$, имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\,\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\nabla)\,\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_1\nabla)\,\mathbf{v}_1 = -\nabla p_1 + \mathrm{R}^{-1}\,\Delta\mathbf{v}_1 \tag{1}$$

(предполагается, что все величины приведены к безразмерному виду, как объяснено в § 19). Умножив это уравнение на $\mathbf{v}_1$ и преобразовав с учетом равенств $\operatorname{div}\mathbf{v}_0 = \operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{v_1^2}{2} = -\,v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - \mathrm{R}^{-1}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{-\frac{1}{2}v_1^2\left(v_{0k}+v_{1k}\right) - p_1 v_{1k} + \mathrm{R}^{-1}v_{1i}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\right\}.$$

Последний член в правой стороне уравнения исчезает после интегрирования по всей области движения в силу условий $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = 0$ на ограничивающих область стенках или на бесконечности. В результате находим искомое соотношение:

$$\dot{E}_1 = T - \mathrm{R}^{-1}D, \tag{2}$$

где

$$E_1 = \int\frac{v_1^2}{2}\,dV,\qquad T = -\int v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k}\,dV,\qquad D = \int\left(\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\right)^2 dV. \tag{3}$$

Функционал T описывает обмен энергией между основным движением и возмущением; он может иметь оба знака. Функционал D — диссипативная потеря энергии, всегда $D > 0$. Обратим внимание на то, что нелинейный по $\mathbf{v}_1$ член в (1) не дает вклада в соотношение (2).

Соотношение (2) позволяет найти оценку снизу для числа $\mathrm{R}_{\text{кр}}$ (*O. Reynolds*, 1894; *W. Orr*, 1907): производная dE_1/dt заведомо отрицательна, т. е. возмущение затухает со временем, если $\mathrm{R} < \mathrm{R}_E$, где

$$\mathrm{R}_E = \min\,(D/T), \tag{4}$$

причем минимум функционала берется по отношению к функциям $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$, удовлетворяющим граничным условиям и уравнению $\operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0$. Существование конечного минимума математически связано с одинаковой (второй) степенью однородности функционалов I и D. Тем самым доказывается существование нижней (по R) границы метастабильности, ниже которой основное движение устойчиво по отношению к любым возмущениям. Даваемая выражением (4) оценка (ее называют энергетической), однако, в большинстве случаев оказывается очень заниженной.

§ 27. Устойчивость вращательного движения жидкости

Для исследования устойчивости стационарного движения жидкости в пространстве между двумя вращающимися цилиндрами (§ 18) в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса можно применить простой способ, аналогичный примененному в § 4 при выводе условия механической устойчивости неподвижной жидкости в поле тяжести (*Rayleigh*, 1916). Идея метода состоит в том, что рассматривается какой-нибудь произвольный малый участок жидкости и предполагается, что этот участок смещается с той траектории, по которой он движется в рассматриваемом течении. При таком смещении появляются силы, действующие на смещенный участок жидкости. Для устойчивости основного движения необходимо, чтобы эти силы стремились вернуть смещенный элемент в исходное положение.

Каждый элемент жидкости в невозмущенном течении движется по окружности $r = \mathrm{const}$ вокруг оси цилиндров. Пусть $\mu(r) = mr^2\dot{\varphi}$ есть момент импульса элемента с массой m ($\dot{\varphi}$ — угловая скорость). Действующая на него центробежная сила равна μ^2/mr^3; эта сила уравновешивается соответствующим радиальным градиентом давления, возникающим во вращающейся жидкости. Предположим теперь, что элемент жидкости, находящийся на расстоянии r_0 от оси, подвергается малому смещению со своей траектории, так что попадает на расстояние $r > r_0$ от оси. Сохраняющийся момент импульса элемента остается при этом равным своему первоначальному значению $\mu_0 = \mu(r_0)$. Соответственно в его новом положении на него будет действовать центробежная сила, равная μ_0^2/mr^3. Для того чтобы элемент стремился возвратиться в исходное положение, эта центробежная сила должна быть меньше, чем ее равновесное значение μ^2/mr^3, уравновешивающееся имеющимся на расстоянии r градиентом давления. Таким образом, необходимое условие устойчивости гласит: $\mu^2 - \mu_0^2 > 0$; разлагая $\mu(r)$ по степеням положительной разности $r - r_0$, напишем это условие в виде

$$\mu \frac{d\mu}{dr} > 0. \qquad (27,1)$$

Согласно формуле (18,3) угловая скорость $\dot{\varphi}$ частиц движущейся жидкости равна

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$