однородности функционалов I и D. Тем самым доказывается существование нижней (по R) границы метастабильности, ниже которой основное движение устойчиво по отношению к любым возмущениям. Даваемая выражением (4) оценка (ее называют энергетической), однако, в большинстве случаев оказывается очень заниженной.

§ 27. Устойчивость вращательного движения жидкости

Для исследования устойчивости стационарного движения жидкости в пространстве между двумя вращающимися цилиндрами (§ 18) в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса можно применить простой способ, аналогичный примененному в § 4 при выводе условия механической устойчивости неподвижной жидкости в поле тяжести (*Rayleigh*, 1916). Идея метода состоит в том, что рассматривается какой-нибудь произвольный малый участок жидкости и предполагается, что этот участок смещается с той траектории, по которой он движется в рассматриваемом течении. При таком смещении появляются силы, действующие на смещенный участок жидкости. Для устойчивости основного движения необходимо, чтобы эти силы стремились вернуть смещенный элемент в исходное положение.

Каждый элемент жидкости в невозмущенном течении движется по окружности $r = \mathrm{const}$ вокруг оси цилиндров. Пусть $\mu(r) = mr^2\dot{\varphi}$ есть момент импульса элемента с массой m ($\dot{\varphi}$ — угловая скорость). Действующая на него центробежная сила равна μ^2/mr^3; эта сила уравновешивается соответствующим радиальным градиентом давления, возникающим во вращающейся жидкости. Предположим теперь, что элемент жидкости, находящийся на расстоянии r_0 от оси, подвергается малому смещению со своей траектории, так что попадает на расстояние $r > r_0$ от оси. Сохраняющийся момент импульса элемента остается при этом равным своему первоначальному значению $\mu_0 = \mu(r_0)$. Соответственно в его новом положении на него будет действовать центробежная сила, равная μ_0^2/mr^3. Для того чтобы элемент стремился возвратиться в исходное положение, эта центробежная сила должна быть меньше, чем ее равновесное значение μ^2/mr^3, уравновешивающееся имеющимся на расстоянии r градиентом давления. Таким образом, необходимое условие устойчивости гласит: $\mu^2 - \mu_0^2 > 0$; разлагая $\mu(r)$ по степеням положительной разности $r - r_0$, напишем это условие в виде

$$\mu \frac{d\mu}{dr} > 0. \tag{27,1}$$

Согласно формуле (18,3) угловая скорость $\dot{\varphi}$ частиц движущейся жидкости равна

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Вычисляя μ как $mr^2\dot{\varphi}$ и опуская все заведомо положительные множители, пишем условие (27,1) в виде

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)\,\dot{\varphi} > 0. \tag{27,2}$$

Угловая скорость $\dot{\varphi}$ монотонно меняется с r от значения Ω_1 на внутреннем до значения Ω_2 на внешнем цилиндре. Если оба цилиндра вращаются в противоположных направлениях, т. е. Ω_1 и Ω_2 имеют различные знаки, то функция $\dot{\varphi}$ меняет знак в пространстве между цилиндрами и ее произведение на постоянное число $\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2$ не может быть везде положительным. Таким образом, в этом случае (27,2) не выполняется во всем объеме жидкости, и движение неустойчиво.

Пусть теперь оба цилиндра вращаются в одну сторону; выбирая это направление вращения в качестве положительного, имеем $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$. Тогда $\dot{\varphi}$ везде положительно, и для выполнения условия (27,2) необходимо, чтобы было

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \tag{27,3}$$

Если же $\Omega_2 R_2^2$ меньше, чем $\Omega_1 R_1^2$, то движение неустойчиво. Так, если внешний цилиндр покоится ($\Omega_2 = 0$), а вращается только внутренний, то движение неустойчиво. Напротив, если покоится внутренний цилиндр ($\Omega_1 = 0$), то движение устойчиво.

Подчеркнем, что в изложенных рассуждениях совершенно не учитывалось влияние вязких сил трения при смещении элемента жидкости. Поэтому использованный метод применим лишь при достаточно малой вязкости, т. е. достаточно больших числах Рейнольдса.

Исследование устойчивости движения при произвольных R должно производиться общим методом, основанным на уравнениях (26,4); для движения между вращающимися цилиндрами это было сделано впервые *Тэйлором* (*G. I. Taylor*, 1924).

В данном случае невозмущенное распределение скоростей v_0 зависит только от цилиндрической координаты r и не зависит ни от угла φ, ни от координаты z вдоль оси цилиндров. Полную систему независимых решений уравнений (26,4) можно поэтому искать в виде

$$\mathbf{v}_1(r, \varphi, z) = e^{i(n\varphi + kz - \omega t)}\mathbf{f}(r) \tag{27,4}$$

с произвольно направленным вектором $\mathbf{f}(r)$. Волновое число k, пробегающее непрерывный ряд значений, определяет периодичность возмущения вдоль оси z. Число же n пробегает лишь целые значения 0, 1, 2, ..., как это следует из условия однозначности функции по переменной φ; значению $n = 0$ отвечают осесимметричные возмущения. Допустимые значения частоты ω получаются в результате решения уравнений с надлежащими граничными условиями в плоскости $z = \mathrm{const}$ (скорость $\mathbf{v}_1 = 0$ при

$r = R_1$ и $r = R_2$). Поставленная таким образом задача определяет при заданных значениях n и k, вообще говоря, дискретный ряд собственных частот $\omega = \omega_n^{(j)}(k)$, где индекс j нумерует различные ветви функции $\omega_n(k)$; эти частоты, вообще говоря, комплексны.

Роль числа Рейнольдса в данном случае может играть величина $\Omega_1 R_1^2/\nu$ или $\Omega_2 R_2^2/\nu$ — при заданных значениях отношений R_1/R_2 и Ω_1/Ω_2, определяющих «тип движения». Будем следить за изменением какой-либо из собственных частот $\omega = \omega_n^{(j)}(k)$ при постепенном увеличении числа Рейнольдса. Момент возникновения неустойчивости (по отношению к данному виду возмущений) определяется тем значением R, при котором функция $\gamma(k) = \operatorname{Im}\omega$ впервые обращается в нуль при каком-либо значении k. При $\mathrm{R} < \mathrm{R}_{кр}$ функция $\gamma(k)$ везде отрицательна, а при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{кр}$ она положительна в некотором интервале значений k. Пусть $k_{кр}$ — то значение k, для которого (при $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{кр}$) функция $\gamma(k)$ обращается в нуль. Соответствующая функция (27,4) определяет характер того (накладывающегося на основное) движения, которое возникает в жидкости в момент потери устойчивости; оно периодично вдоль оси цилиндров с периодом $2\pi/k_{кр}$. При этом, конечно, фактическая граница устойчивости определяется тем видом возмущений (т. е. той функцией $\omega_n^{(j)}(k)$), которая дает наименьшее значение $\mathrm{R}_{кр}$; именно эти «наиболее опасные» возмущения интересуют нас здесь. Как правило (см. ниже), ими являются осесимметричные возмущения. Ввиду большой сложности, достаточно полное исследование этих возмущений было произведено лишь для случая узкого зазора между цилиндрами ($h \equiv R_2 - R_1 \ll R \equiv (R_1 + R_2)/2$). Оно приводит к следующим результатам[1]).

Оказывается, что решению, приводящему к наименьшему значению $\mathrm{R}_{кр}$, отвечает чисто мнимая функция $\omega(k)$. Поэтому при $k = k_{кр}$ не только $\operatorname{Im}\omega = 0$, но и вообще $\omega = 0$. Это значит, что первая потеря устойчивости стационарным вращением жидкости приводит к возникновению другого, тоже стационарного течения[2]). Оно представляет собой тороидальные вихри (их называют *тэйлоровскими*), регулярно расположенные вдоль длины цилиндров. Для случая вращения обоих цилиндров в одну сторону, на рис. 14 схематически изображены проекции линий тока этих вихрей на плоскость меридионального сечения цилиндров

[1]) Подробное изложение можно найти в книгах: *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963, ч. 2; *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. — Oxford, 1961; *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. — Cambridge, 1981.

[2]) В таких случаях говорят о *смене устойчивостей*. Экспериментальные данные, а также числовые результаты для ряда частных случаев, дают основание считать, что это свойство имеет для рассматриваемого движения общий характер и не связано с малостью h.

(скорость v_1 имеет в действительности также и азимутальную компоненту). На длине $2\pi/k_{кр}$ каждого периода расположены два вихря с противоположными направлениями вращения.

При R, несколько превышающем $R_{кр}$, имеется уже не одно, а целый интервал значений k, для которых $\operatorname{Im}\omega > 0$. Не следует, однако, думать, что возникающее при этом движение будет представлять собой одновременное наложение движений с различными периодичностями. В действительности при каждом R возникает движение с вполне определенной периодичностью, стабилизирующее все течение в целом. Определение этой периодичности, однако, уже невозможно с помощью линеаризованного уравнения (26,4).

На рис. 15 изображен примерный вид кривой, разделяющей области устойчивости и неустойчивости (последняя заштрихована) при заданном значении R_1/R_2. Правая ветвь кривой, соответ-

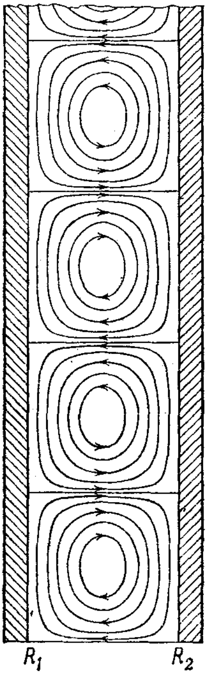

Рис. 14

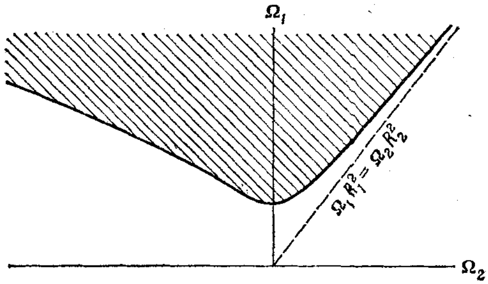

Рис. 15

ствующая вращению цилиндров в одну сторону, имеет в качестве асимптоты прямую $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$ (это свойство имеет в действительности общий характер и не связано с малостью h). Увеличению числа Рейнольдса для заданного типа движения отвечает перемещение вверх по прямой, выходящей из начала координат и отвечающей данному значению Ω_1/Ω_2. На правой части диаграммы все такие прямые, для которых $\Omega_2 R_2^2/\Omega_1 R_1^2 > 1$, нигде не пересекают границы области неустойчивости. Напротив, при $\Omega_2 R_2^2/\Omega_1 R_1^2 < 1$ и достаточном увеличении числа Рейнольдса мы всегда попадем в область неустойчивости — в согласии с условием (27,3). На левой части диаграммы (Ω_1 и Ω_2 имеют различные знаки) всякая прямая, проведенная из начала координат, пересекает границу заштрихованной области, т. е. при достаточном увеличении числа Рейнольдса стационарное движение в конце концов теряет устойчивость при любом отношении $|\Omega_2/\Omega_1|$ — снова в согласии с полученными выше результатами. При $\Omega_2 = 0$ (вращается только внутренний цилиндр) неустойчивость наступает при числе Рейнольдса (определенном как $\mathrm{R} = h\Omega_1 R_1/\nu$), равном

$$\mathrm{R}_{кр} = 41{,}3 \sqrt{\frac{R}{h}}. \qquad (27{,}5)$$

Отметим, что в рассматриваемом движении вязкость оказывает стабилизирующее влияние: движение, устойчивое при $\nu = 0$, остается устойчивым и при учете вязкости; движение же, неустойчивое при $\nu = 0$, может оказаться устойчивым для вязкой жидкости.

Неосесимметричные возмущения движения между вращающимися цилиндрами не исследованы систематически. Результаты расчетов частных случаев дают основание считать, что на правой стороне диаграммы рис. 15 наиболее опасными всегда остаются осесимметричные возмущения. Напротив, на левой стороне диаграммы, при достаточно больших значениях $|\Omega_2/\Omega_1|$, учет неосесимметричных возмущений, по-видимому, несколько изменяет форму граничной кривой. При этом вещественная часть частоты возмущения не обращается в нуль, так что возникающее движение нестационарно; это существенно меняет характер неустойчивости.

Предельным (при $h \to 0$) случаем движения между вращающимися цилиндрами является движение жидкости между двумя движущимися друг относительно друга параллельными плоскостями (см. § 17). Это движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых значениях числа $\mathrm{R} = hu/\nu$ (u — относительная скорость плоскостей).

§ 28. Устойчивость движения по трубе

Совершенно особым характером потери устойчивости обладает стационарное течение жидкости по трубе (рассмотренное в § 17).

Ввиду однородности потока вдоль оси x (вдоль длины трубы) невозмущенное распределение скоростей $\mathbf{v}_0$ не зависит от координаты x. Аналогично изложенному в предыдущем параграфе мы можем поэтому искать решения уравнений (26,4) в виде

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kx-\omega t)}\mathbf{f}(y, z). \qquad (28{,}1)$$

И здесь будет существовать такое значение $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{кр}$, при котором $\gamma = \operatorname{Im}\omega$ впервые обращается при некотором значении k в нуль. Существенно, однако, что вещественная часть функции $\omega(k)$ теперь уже отнюдь не будет равна нулю.