статочном увеличении числа Рейнольдса стационарное движение в конце концов теряет устойчивость при любом отношении $|\Omega_2/\Omega_1|$ — снова в согласии с полученными выше результатами. При $\Omega_2 = 0$ (вращается только внутренний цилиндр) неустойчивость наступает при числе Рейнольдса (определенном как $\mathrm{R} = h\Omega_1 R_1/\nu$), равном

$$\mathrm{R}_{\text{кр}} = 41{,}3\sqrt{\frac{R}{h}}. \qquad (27,5)$$

Отметим, что в рассматриваемом движении вязкость оказывает стабилизирующее влияние: движение, устойчивое при $\nu = 0$, остается устойчивым и при учете вязкости; движение же, неустойчивое при $\nu = 0$, может оказаться устойчивым для вязкой жидкости.

Неосесимметричные возмущения движения между вращающимися цилиндрами не исследованы систематически. Результаты расчетов частных случаев дают основание считать, что на правой стороне диаграммы рис. 15 наиболее опасными всегда остаются осесимметричные возмущения. Напротив, на левой стороне диаграммы, при достаточно больших значениях $|\Omega_2/\Omega_1|$, учет неосесимметричных возмущений, по-видимому, несколько изменяет форму граничной кривой. При этом вещественная часть частоты возмущения не обращается в нуль, так что возникающее движение нестационарно; это существенно меняет характер неустойчивости.

Предельным (при $h \to 0$) случаем движения между вращающимися цилиндрами является движение жидкости между двумя движущимися друг относительно друга параллельными плоскостями (см. § 17). Это движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых значениях числа $\mathrm{R} = hu/\nu$ ($u$ — относительная скорость плоскостей).

## § 28. Устойчивость движения по трубе

Совершенно особым характером потери устойчивости обладает стационарное течение жидкости по трубе (рассмотренное в § 17).

Ввиду однородности потока вдоль оси $x$ (вдоль длины трубы) невозмущенное распределение скоростей $\mathbf{v}_0$ не зависит от координаты $x$. Аналогично изложенному в предыдущем параграфе мы можем поэтому искать решения уравнений (26,4) в виде

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kx-\omega t)}\mathbf{f}(y, z). \qquad (28,1)$$

И здесь будет существовать такое значение $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$, при котором $\gamma = \operatorname{Im}\omega$ впервые обращается в нуль при некотором значении $k$ в нуль. Существенно, однако, что вещественная часть функции $\omega(k)$ теперь уже отнюдь не будет равна нулю.

Для значений R, лишь немного превышающих $R_{кр}$, интервал значений $k$, в котором $\gamma(k) > 0$, мал и расположен вокруг точки, в которой $\gamma(k)$ имеет максимум, т. е. $d\gamma/dk = 0$ (как это ясно из рис. 16). Пусть в некотором участке потока возникает слабое возмущение; оно представляет собой волновой пакет, получающийся путем наложения ряда компонент вида (28,1). С течением времени будут усиливаться те из этих компонент, для которых $\gamma(k) > 0$; остальные же компоненты затухнут. Возникающий таким образом усиливающийся волновой пакет будет в то же время «сноситься» вниз по течению со скоростью, равной групповой скорости пакета $d\omega/dk$ (§ 67); поскольку речь идет теперь о волнах со значениями волновых векторов в малом интервале вокруг точки, в которой $d\gamma/dk = 0$, то величина

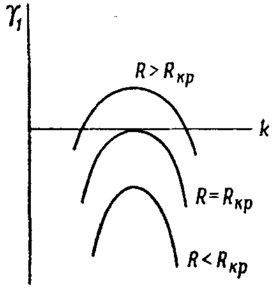

Рис. 16

$$\frac{d\omega}{dk} \approx \frac{d}{dk} \operatorname{Re} \omega \tag{28,2}$$

вещественна и потому действительно представляет собой истинную скорость распространения пакета.

Этот снос возмущений вниз по течению весьма существен и придает всему явлению потери устойчивости совершенно иной характер по сравнению с тем, который был описан в § 27.

Поскольку положительность $\operatorname{Im} \omega$ сама по себе означает теперь лишь усиление перемещающегося вниз по течению возмущения, то открываются две возможности. В одном случае, несмотря на перемещение волнового пакета, возмущение неограниченно возрастает со временем в любой фиксированной в пространстве точке потока; такую неустойчивость по отношению к сколь угодно малым возмущениям будем называть *абсолютной*. В другом же случае пакет сносится так быстро, что в каждой фиксированной точке пространства возмущение стремится при $t \to \infty$ к нулю; такую неустойчивость будем называть *сносовой*, или *конвективной*[1]). Для пуазейлевого течения, по-видимому, имеет место второй случай (см. ниже примечание на с. 150).

Следует сказать, что различие между обоими случаями имеет относительный характер в том смысле, что зависит от выбора системы отсчета, по отношению к которой рассматривается неустойчивость: конвективная в некоторой системе неустойчивость становится абсолютной в системе, движущейся «вместе с пакетом», а абсолютная неустойчивость становится конвективной

[1]) Общий метод, позволяющий установить характер неустойчивости, описан в другом томе этого курса (см. X, § 62).

в системе, достаточно быстро «уходящей» от пакета. В данном случае, однако, физический смысл этого различия устанавливается существованием выделенной системы отсчета, по отношению к которой и следует рассматривать неустойчивость — системы, в которой покоятся стенки трубы. Более того, поскольку реальные трубы имеют хотя и большую, но конечную длину, возникающее где-либо возмущение может, в принципе, оказаться вынесенным из трубы раньше, чем оно приведет к истинному срыву ламинарного течения.

Поскольку возмущения возрастают с координатой $x$ вниз по течению, а не со временем в заданной точке пространства, то при исследовании этого типа неустойчивости разумно поставить вопрос следующим образом. Предположим, что в заданном месте пространства на поток накладывается непрерывно действующее возмущение с определенной частотой $\omega$, и посмотрим, что будет происходить с этим возмущением при его сносе вниз по течению. Обращая функцию $\omega(k)$, мы найдем, какой волновой вектор $k$ соответствует заданной (вещественной) частоте. Если $\operatorname{Im} k < 0$, то множитель $e^{ikx}$ возрастает с увеличением $x$, т. е. возмущение усиливается. Кривая в плоскости $\omega$, R, определяемая уравнением $\operatorname{Im} k(\omega, \mathrm{R}) = 0$ (ее называют кривой *нейтральной устойчивости* или просто *нейтральной кривой*) дает границу устойчивости, разделяя для каждого R области значений частоты возмущений, усиливающихся или затухающих вниз по течению.

Фактическое проведение вычислений чрезвычайно сложно. Полное исследование было произведено аналитическими методами лишь для плоского пуазейлевого течения — течения между двумя параллельными плоскостями (*C. C. Lin*, 1945). Укажем здесь результаты такого исследования[1]).

Течение (невозмущенное) между плоскостями однородно не только вдоль направления своей скорости (ось $x$), но и во всей плоскости $xz$ (ось $y$ перпендикулярна плоскостям). Поэтому можно искать решения уравнений (26,4) в виде

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \mathbf{f}(y) \tag{28,3}$$

с волновым вектором $\mathbf{k}$ в произвольном направлении в плоскости $xz$. Нас, однако, интересуют лишь те возрастающие возмущения, которые появляются (при увеличении R) первыми; именно они определяют границу устойчивости. Можно показать, что при заданной величине волнового вектора первым становится незатухающим возмущение с $\mathbf{k}$ вдоль оси $x$, причем $f_z = 0$. Таким образом, достаточно рассматривать только двумерные (как и

[1]) См. книгу: *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958 [*Lin C. C.* The theory of hydrodynamic stability. — Cambridge, 1955]. Изложение этих, а также и более поздних исследований по данному вопросу дано в указанной в примечании на с. 145 книге Дразина и Рейда.

основное течение) возмущения в плоскости $xy$, не зависящие от координаты $z$[1]).

Нейтральная кривая для течения между плоскостями изображена схематически на рис. 17. Заштрихованная область внутри кривой — область неустойчивости[2]). Наименьшее значение R, при котором появляются незатухающие возмущения, оказывается равным $R_{кр} = 5772$ (по более поздним уточненным расчетам, *S. A. Orszag*, 1971); число Рейнольдса определено здесь как

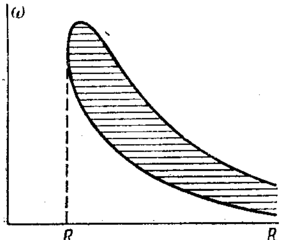


Рис. 17

$$R = U_{max}h/2\nu, \qquad (28,4)$$

где $U_{max}$ — максимальная скорость течения, а $h/2$ — половина расстояния между плоскостями, т. е. расстояние, на котором скорость возрастает от нуля до максимума[3]). Значению $R = R_{кр}$ отвечает волновой вектор возмущения $k_{кр} = 2{,}04/h$. При $R \to \infty$ обе ветви нейтральной кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс по законам

$$\omega h/U_{max} \approx R^{-3/11} \text{ и } \omega h/U_{max} \approx R^{-3/7}$$

соответственно для верхней и нижней ветвей; при этом на обоих ветвях $\omega$ и $k$ связаны соотношениями вида $\omega h/U \approx (kh)^3$.

Таким образом, для всякой отличной от нуля частоты $\omega$, не превышающей определенного максимального значения ($\sim U/h$), существует конечный интервал значений R, в котором возмущения усиливаются[4]). Интересно, что малая, но конечная вязкость жидкости оказывает в данном случае в известном смысле

---

[1]) Доказательство этого утверждения (*H. B. Squire*, 1933) состоит в том, что система уравнений (26,4) для возмущений вида (26,4) может быть приведена к виду, в котором она отличается от уравнений для двумерных возмущений лишь заменой R на $R\cos\varphi$, где $\varphi$ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_0$ (в плоскости $xz$). Поэтому критическое число $\tilde{R}_{кр}$ для трехмерных возмущений (с заданным $k$) $\tilde{R}_{кр} = R_{кр}/\cos\varphi > R_{кр}$, где $R_{кр}$ вычислено для двумерных возмущений.

[2]) Нейтральная кривая в плоскости $k$, R имеет аналогичный вид. Поскольку на нейтральной кривой вещественны как $\omega$, так и $k$, то эти кривые в обоих плоскостях — это одна и та же зависимость, выраженная в различных переменных.

[3]) В литературе используется также и другое определение R для плоского пуазейлевого течения — как отношения $h\bar{U}/\nu$, где $\bar{U}$ — средняя (по сечению) скорость жидкости. Ввиду равенства $\bar{U} = 2U_{max}/3$, имеем $h\bar{U}/\nu = 4R/3$, где R определено согласно (28,4).

[4]) Доказательство конвективного характера неустойчивости плоского пуазейлевого течения дано в статье: *Иорданский С. В., Куликовский А. Г.* — ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 1326. Доказательство, однако, относится лишь к области очень больших значений R, в которой обе ветви нейтральной кривой близки к оси абсцисс, т. е. на обоих ветвях $kh \ll 1$. Для чисел $R$, при которых на нейтральной кривой $kh \sim 1$, вопрос остается открытым.

дестабилизирующее влияние на устойчивость по сравнению с тем, что имело бы место для строго идеальной жидкости[1]. Действительно, при $R \to \infty$ возмущения со всякой частотой затухают; при введении же конечной вязкости мы в конце концов попадем в область неустойчивости, пока дальнейшее увеличение вязкости (уменьшение R) не выведет снова из этой области.

Для течения в трубе кругового сечения полное теоретическое исследование устойчивости еще отсутствует, но имеющиеся результаты дают веские основания полагать, что это движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям (как в абсолютном, так и в конвективном смысле) при любых числах Рейнольдса. В силу аксиальной симметрии основного течения, возмущения можно искать в виде

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(n\varphi + kz - \omega t)}\mathbf{f}(r) \tag{28,5}$$

(как и в (27,4)). Можно считать доказанным, что осесимметричные ($n = 0$) возмущения всегда затухают. Среди исследованных неосесимметричных колебаниях (с определенными значениями $n$ в определенных интервалах значений числа Рейнольдса) тоже не оказалось незатухающих. На устойчивость течения в трубе указывает и то обстоятельство, что при очень тщательном устранении возмущений у входа в трубу удается поддерживать ламинарное течение до очень больших значений R (фактически его удавалось наблюдать вплоть до $R \approx 10^5$, где

$$R = U_{max}\, d/2\nu = \overline{U}\, d/\nu, \tag{28,6}$$

$d$ — диаметр трубы, $U_{max}$ — скорость жидкости на оси трубы).

Течение между плоскостями и течение в трубе кругового сечения можно рассматривать как предельные случаи течения в трубе кольцевого сечения, т. е. между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями (радиусов $R_1$ и $R_2$, $R_2 > R_1$). При $R_1 = 0$ мы возвращаемся к трубе кругового сечения, а пределу $R_1 \to R_2$ отвечает течение между плоскостями. По-видимому, критическое число $R_{кр}$ существует при всех отличных от нуля значениях отношения $R_1/R_2 < 1$, а при $R_1/R_2 \to 0$ оно стремится к бесконечности.

Для всех этих пуазейлевых течений существует также критическое число $R'_{кр}$, определяющее границу устойчивости по отношению к возмущениям конечной интенсивности. При $R < R'_{кр}$ в трубе вообще не может существовать незатухающего нестационарного движения. Если в каком-либо участке возникает турбулентность, то при $R < R'_{кр}$ турбулентная область, сносясь вниз по течению, в то же время сужается, пока не исчезнет совсем;

[1]) Это свойство было впервые обнаружено *Гейзенбергом* (*W. Heisenberg*, 1924).

напротив, при $R > R'_{кр}$ она будет с течением времени расширяться, захватывая все больший участок потока. Если возмущения течения непрерывно происходят у входа в трубу, то при $R < R'_{кр}$ они непременно затухнут на некотором расстоянии от входа, сколь бы сильны они не были. Напротив, при $R > R'_{кр}$ движение станет турбулентным на всем протяжении трубы, причем для этого достаточны тем более слабые возмущения, чем больше R. В интервале между $R'_{кр}$ и $R_{кр}$ ламинарное течение метастабильно. Для трубы кругового сечения незатухающая турбулентность наблюдалась уже при $R \approx 1800$, а для течения между параллельными плоскостями — начиная с $R \approx 1000$.

Ввиду «жесткости» срыва ламинарного течения в трубе, он сопровождается скачкообразным изменением силы сопротивления. При течении по трубе при $R > R'_{кр}$ имеется, по существу, два различных закона сопротивления (зависимости силы сопротивления от R) — один для ламинарного и другой для турбулентного течений (см. ниже § 43). При каком бы значении R ни произошел переход одного в другое, сила сопротивления испытывает скачок.

В заключение этого параграфа сделаем еще следующее замечание. Граница устойчивости (нейтральная кривая), полученная для течения в неограниченно длинной трубе, имеет еще и другой смысл. Рассмотрим течение в трубе очень большой (по сравнению с ее шириной), но конечной длины. Пусть на каждом из ее концов поставлены определенные граничные условия — задан профиль скорости (например, можно представить себе концы трубы закрытыми пористыми стенками, создающими однородный профиль); везде, за исключением концевых отрезков трубы, профиль (невозмущенный) скорости можно считать пуазейлевским, не зависящим от $x$. Для определенной таким образом конечной системы можно поставить задачу об устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям (общий метод установления критерия такой устойчивости, которую называют *глобальной*, описан в IX, § 65). Можно показать, что упомянутая выше нейтральная кривая для бесконечной трубы является в то же время границей глобальной устойчивости в конечной трубе, независимо от конкретных граничных условий на ее концах [1]).

## § 29. Неустойчивость тангенциальных разрывов

Движением несжимаемой жидкости, неустойчивым в идеальной жидкости, являются течения, при которых два слоя жидкости двигались бы друг относительно друга, «скользя» один по

[1]) См. *Куликовский А. Г.* — Прикл. мат. и мех., 1968, т. 32, с. 112.