напротив, при $R > R'_{кр}$ она будет с течением времени расширяться, захватывая все больший участок потока. Если возмущения течения непрерывно происходят у входа в трубу, то при $R < R'_{кр}$ они непременно затухнут на некотором расстоянии от входа, сколь бы сильны они не были. Напротив, при $R > R'_{кр}$ движение станет турбулентным на всем протяжении трубы, причем для этого достаточны тем более слабые возмущения, чем больше R. В интервале между $R'_{кр}$ и $R_{кр}$ ламинарное течение метастабильно. Для трубы кругового сечения незатухающая турбулентность наблюдалась уже при $R \approx 1800$, а для течения между параллельными плоскостями — начиная с $R \approx 1000$.

Ввиду «жесткости» срыва ламинарного течения в трубе, он сопровождается скачкообразным изменением силы сопротивления. При течении по трубе при $R > R'_{кр}$ имеется, по существу, два различных закона сопротивления (зависимости силы сопротивления от R) — один для ламинарного и другой для турбулентного течений (см. ниже § 43). При каком бы значении R ни произошел переход одного в другое, сила сопротивления испытывает скачок.

В заключение этого параграфа сделаем еще следующее замечание. Граница устойчивости (нейтральная кривая), полученная для течения в неограниченно длинной трубе, имеет еще и другой смысл. Рассмотрим течение в трубе очень большой (по сравнению с ее шириной), но конечной длины. Пусть на каждом из ее концов поставлены определенные граничные условия — задан профиль скорости (например, можно представить себе концы трубы закрытыми пористыми стенками, создающими однородный профиль); везде, за исключением концевых отрезков трубы, профиль (невозмущенный) скорости можно считать пуазейлевским, не зависящим от x. Для определенной таким образом конечной системы можно поставить задачу об устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям (общий метод установления критерия такой устойчивости, которую называют *глобальной*, описан в IX, § 65). Можно показать, что упомянутая выше нейтральная кривая для бесконечной трубы является в то же время границей глобальной устойчивости в конечной трубе, независимо от конкретных граничных условий на ее концах[1]).

§ 29. Неустойчивость тангенциальных разрывов

Движением несжимаемой жидкости, неустойчивым в идеальной жидкости, являются течения, при которых два слоя жидкости двигались бы друг относительно друга, «скользя» один по

[1]) См. *Куликовский А. Г.* — Прикл. мат. и мех., 1968, т. 32, с. 112.

другому; поверхность раздела между этими двумя слоями жидкости была бы поверхностью *тангенциального разрыва*, на которой скорость жидкости (направленная по касательной к поверхности) испытывала бы скачок (*H. Helmholtz*, 1868; *W. Kelvin*, 1871). В дальнейшем мы увидим, к какой картине фактически осуществляющегося движения приводит эта неустойчивость (§ 35); здесь же проведем доказательство сделанного утверждения.

Рассматривая небольшой участок поверхности разрыва и течение жидкости вблизи него, мы можем считать этот участок плоским, а скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ жидкости по обеим его сторонам постоянными. Не ограничивая общности, можно считать, что одна из этих скоростей равна нулю; этого всегда можно добиться соответствующим выбором системы координат. Пусть $\mathbf{v}_2 = 0$, а $\mathbf{v}_1$ обозначим просто как $\mathbf{v}$; направление $\mathbf{v}$ выберем в качестве оси x, а ось z направим по нормали к поверхности.

Пусть поверхность разрыва испытывает слабое возмущение («рябь»), при котором все величины — координаты точек самой поверхности, давление и скорость жидкости — являются периодическими функциями, пропорциональными $e^{i(kx-\omega t)}$. Рассмотрим жидкость с той стороны от поверхности разрыва, где ее скорость равна $\mathbf{v}$, и обозначим посредством $\mathbf{v}'$ малое изменение скорости при возмущении. Согласно уравнениям (26,4) (с постоянным $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ и $\nu = 0$) имеем для возмущения $\mathbf{v}'$ следующую систему:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}' = -\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Поскольку $\mathbf{v}$ направлено по оси x, то второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = -\frac{\nabla p'}{\rho}. \tag{29,1}$$

Если применить к обеим его сторонам операцию div, то в силу первого уравнения мы получим слева нуль, так что p' должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta p' = 0. \tag{29,2}$$

Пусть $\zeta = \zeta(x, t)$ есть смещение вдоль оси z точек поверхности разрыва при возмущении. Производная $\partial\zeta/\partial t$ есть скорость изменения координаты ζ поверхности при заданной координате x. Поскольку нормальная к поверхности разрыва компонента скорости жидкости равна скорости перемещения самой поверхности, то в требуемом приближении имеем:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_z - v\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{29,3}$$

(для v'_z надо, конечно, брать ее значение на самой поверхности).

Будем искать p' в виде

$$p' = f(z)\, e^{i(kx-\omega t)}.$$

Подстановка в (29,2) дает для $f(z)$ уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0,$$

откуда $f = \mathrm{const}\, e^{\pm kz}$. Пусть пространство с рассматриваемой стороны поверхности разрыва (сторона 1) соответствует положительным z. Тогда мы должны взять $f = \mathrm{const}\, e^{-kz}$, так что

$$p_1' = \mathrm{const}\, e^{i(kx-\omega t)} e^{-kz}. \tag{29,4}$$

Подставляя это выражение в z-компоненту уравнения (29,1), найдем [1]:

$$v_z' = \frac{kp_1'}{i\rho_1 (kv-\omega)}. \tag{29,5}$$

Смещение ζ тоже ищем в виде, пропорциональном такому же экспоненциальному множителю $e^{i(kx-\omega t)}$, и получаем из (29,3):

$$v_z' = i\zeta(kv-\omega).$$

Вместе с (29,5) это дает

$$p_1' = -\zeta \frac{\rho_1 (kv-\omega)^2}{k}. \tag{29,6}$$

Давление p_2' по другую сторону поверхности выразится такой же формулой, в которой надо теперь положить $v = 0$, и, кроме того, изменить общий знак (соответственно тому, что в этой области $z < 0$ и все величины должны быть пропорциональны e^{kz}, а не e^{-kz}). Таким образом,

$$p_2' = \zeta \frac{\rho_2 \omega^2}{k}. \tag{29,7}$$

Мы пишем различные плотности ρ_1 и ρ_2, имея в виду охватить также и случай, когда речь идет о границе раздела между двумя различными несмешивающимися жидкостями.

Наконец, из условия равенства давлений p_1' и p_2' на поверхности разрыва получаем:

$$\rho_1 (kv-\omega)^2 = -\rho_2 \omega^2,$$

откуда находим искомую зависимость между ω и k:

$$\omega = kv \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1+\rho_2}. \tag{29,8}$$

---

[1]) Случай $kv = \omega$, в принципе возможный, нас не интересует, так как неустойчивость может быть связана только с комплексными, а не вещественными частотами ω.

Мы видим, что ω оказывается комплексной величиной, причем всегда имеются ω с положительной мнимой частью. Таким образом, тангенциальные разрывы неустойчивы — уже по отношению к бесконечно малым возмущениям [1]). В таком виде этот результат относится к сколь угодно малой вязкости. В этом случае не имеет смысла различать неустойчивость сносового типа от абсолютной неустойчивости, поскольку с увеличением k мнимая часть ω неограниченно возрастает, и потому коэффициент усиления возмущения при его сносе может быть сколь угодно велик.

При учете конечной вязкости тангенциальный разрыв теряет свою резкость; изменение скорости от одного до другого значения происходит в слое конечной толщины. Вопрос об устойчивости такого движения в математическом отношении вполне аналогичен вопросу об устойчивости в ламинарном пограничном слое с перегибом в профиле скоростей (§ 41). Экспериментальные данные и численные расчеты показывают, что в данном случае неустойчивость наступает очень рано, возможно даже, что всегда [2]).

§ 30. Квазипериодическое движение и синхронизация частот [3])

В последующем изложении (§§ 30—32) будет удобным пользоваться определенными геометрическими образами. Для этого введем математическое представление о *пространстве состояний* жидкости, каждая точка которого отвечает определенному распределению (полю) скоростей в ней. Состояниям в близкие моменты времени соответствуют при этом близкие точки [4]).

Образом стационарного движения служит точка, а образом периодического движения — замкнутая линия (траектория) в пространстве состояний; о них говорят соответственно как о *предельной точке* или *предельном цикле*. Если эти движения устойчивы, то это значит, что соседние траектории, описываю-

[1]) Если направление волнового вектора $\mathbf{k}$ (в плоскости xy) не совпадает с направлением $\mathbf{v}$, а образует с ним угол φ, то в (29,8) v заменится на $v\cos\varphi$; это ясно из того, что невозмущенная скорость входит в исходное линеаризованное уравнение Эйлера только в комбинации $(\mathbf{v}\nabla)$. Очевидно, что и такие возмущения будут неустойчивы.

[2]) Численные расчеты устойчивости производились для плоскопараллельных течений с профилем скоростей, меняющихся между двумя значениями $\pm v_0$ по некоторому закону, например, $v = v_0 \,\mathrm{th}(z/h)$ (роль числа Рейнольдса играет при этом $\mathrm{R} = v_0 h/\nu$). Нейтральная кривая в плоскости k, R оказывается выходящей из начала координат, так что для каждого значения R имеется интервал значений k (возрастающий с увеличением R), для которых течение неустойчиво.

[3]) §§ 30—32 написаны совместно с М. И. Рабиновичем.

[4]) В математической литературе это бесконечномерное функциональное пространство (или конечномерные пространства, которыми оно может быть в некоторых случаях заменено — см. ниже) часто называют фазовым. Мы не пользуемся здесь этим термином во избежание смешения с более конкретным смыслом, который он обычно имеет в физике.