Мы видим, что ω оказывается комплексной величиной, причем всегда имеются ω с положительной мнимой частью. Таким образом, тангенциальные разрывы неустойчивы — уже по отношению к бесконечно малым возмущениям [1]). В таком виде этот результат относится к сколь угодно малой вязкости. В этом случае не имеет смысла различать неустойчивость сносового типа от абсолютной неустойчивости, поскольку с увеличением k мнимая часть ω неограниченно возрастает, и потому коэффициент усиления возмущения при его сносе может быть сколь угодно велик.

При учете конечной вязкости тангенциальный разрыв теряет свою резкость; изменение скорости от одного до другого значения происходит в слое конечной толщины. Вопрос об устойчивости такого движения в математическом отношении вполне аналогичен вопросу об устойчивости в ламинарном пограничном слое с перегибом в профиле скоростей (§ 41). Экспериментальные данные и численные расчеты показывают, что в данном случае неустойчивость наступает очень рано, возможно даже, что всегда [2]).

§ 30. Квазипериодическое движение и синхронизация частот [3])

В последующем изложении (§§ 30—32) будет удобным пользоваться определенными геометрическими образами. Для этого введем математическое представление о *пространстве состояний* жидкости, каждая точка которого отвечает определенному распределению (полю) скоростей в ней. Состояниям в близкие моменты времени соответствуют при этом близкие точки [4]).

Образом стационарного движения служит точка, а образом периодического движения — замкнутая линия (траектория) в пространстве состояний; о них говорят соответственно как о *предельной точке* или *предельном цикле*. Если эти движения устойчивы, то это значит, что соседние траектории, описываю-

---

[1]) Если направление волнового вектора $\mathbf{k}$ (в плоскости xy) не совпадает с направлением $\mathbf{v}$, а образует с ним угол φ, то в (29,8) v заменится на $v\cos\varphi$; это ясно из того, что невозмущенная скорость входит в исходное линеаризованное уравнение Эйлера только в комбинации $(\mathbf{v}\nabla)$. Очевидно, что и такие возмущения будут неустойчивы.

[2]) Численные расчеты устойчивости производились для плоскопараллельных течений с профилем скоростей, меняющихся между двумя значениями $\pm v_0$ по некоторому закону, например, $v = v_0\,\mathrm{th}(z/h)$ (роль числа Рейнольдса играет при этом $\mathrm{R} = v_0 h/\nu$). Нейтральная кривая в плоскости k, R оказывается выходящей из начала координат, так что для каждого значения R имеется интервал значений k (возрастающий с увеличением R), для которых течение неустойчиво.

[3]) §§ 30—32 написаны совместно с М. И. Рабиновичем.

[4]) В математической литературе это бесконечномерное функциональное пространство (или конечномерные пространства, которыми оно может быть в некоторых случаях заменено — см. ниже) часто называют фазовым. Мы не пользуемся здесь этим термином во избежание смешения с более конкретным смыслом, который он обычно имеет в физике.

щие процесс установления движения, стремятся (при $t \to \infty$) к предельной точке или предельному циклу.

Предельный цикл (или точка) имеет в пространстве состояний определенную *область притяжения*: начинающиеся в этой области траектории в конце концов выходят на цикл. В этой связи о предельном цикле говорят как об *аттракторе*[1]). Подчеркнем, что для движения жидкости в заданном объеме с определенными граничными условиями (и при заданном значении R) аттрактор может быть не единствен. Возможны ситуации, когда в пространстве состояний существуют различные аттракторы, каждый из которых имеет свою область притяжения. Другими словами, при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$ может оказаться более чем один устойчивый режим движения и различные режимы осуществляются в зависимости от способа достижения данного значения R. Подчеркнем, что эти различные устойчивые режимы являются решениями нелинейной (!) системы уравнений движения[2]).

Обратимся к изучению явлений, возникающих при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса, после достижения им критического значения и установления рассматривавшегося в § 26 периодического течения. По мере увеличения R наступает в конце концов момент, когда становится неустойчивым и это периодическое движение. Исследование этой неустойчивости должно, в принципе, производиться аналогично изложенному в § 26 способу определения неустойчивости исходного стационарного движения. Роль невозмущенного движения играет теперь периодическое движение $\mathbf{v}_0(r, t)$ (с частотой ω_1), а в уравнения движения подставляется $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_2$ — малая поправка. Для $\mathbf{v}_2$ получается снова линейное уравнение, но его коэффициенты являются теперь функциями не только координат, но и времени, причем по времени эти коэффициенты представляют собой периодические функции с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Решение такого уравнения должно разыскиваться в виде

$$\mathbf{v}_2 = \Pi(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t}, \tag{30,1}$$

где $\Pi(\mathbf{r}, t)$ — периодическая функция времени (с тем же периодом T_1). Неустойчивость наступает снова при появлении частоты $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$, у которой мнимая часть $\gamma_2 > 0$, а вещественная часть ω_2 определяет новую появляющуюся частоту.

За период T_1 возмущение (30,1) меняется в $\mu \equiv e^{-i\omega T_1}$ раз. Этот множитель называют *мультипликатором* периодического движения; он является удобной характеристикой усиления или затухания возмущений этого движения. Периодическому движе-

[1]) От английского слова attraction — притяжение.

[2]) Такова, например, ситуация при потере устойчивости куэттовским течением; устанавливающееся новое движение фактически зависит от истории процесса, которым цилиндры приводятся во вращение с определенными угловыми скоростями.

нию непрерывной среды (жидкости) соответствует бесконечное множество мультипликаторов, отвечающих бесконечному числу возможных независимых возмущений. Потеря им устойчивости происходит при числе $R_{кр2}$, при котором один или более мультипликаторов по модулю становятся равными 1, т. е. в комплексной плоскости значения μ пересекают единичную окружность. Ввиду вещественности уравнений проходить через эту окружность мультипликаторы могут только комплексно-сопряженными парами, или поодиночке, оставаясь вещественными, т. е. в точках $+1$ или -1. Потеря устойчивости периодическим движением сопровождается определенной качественной перестройкой поведения траекторий в пространстве состояний в окрестности ставшего неустойчивым предельного цикла или, как говорят, своей локальной *бифуркацией*. Характер бифуркации в значительной степени определяется именно тем, в каких точках единичной окружности мультипликаторы ее пересекают [1]).

Рассмотрим бифуркацию при пересечении единичной окружности парой комплексно-сопряженных мультипликаторов вида $\mu = \exp(\mp 2\pi\alpha i)$, где α — иррациональное число. Это приводит к появлению вторичного течения с новой независимой частотой $\omega_2 = \alpha\omega_1$, т. е. в результате возникает некоторое квазипериодическое движение, характеризующееся двумя несоизмеримыми частотами. Геометрическим образом этого движения в пространстве состояний служит траектория в виде незамкнутой намотки на двумерном торе [2]), причем ставший неустойчивым предельный цикл служит образующей тора; частота ω_1 соответствует вращению по образующей тора, частота ω_2 — вращению на торе (рис. 18). Подобно тому, как после появления первого периодического движения течение обладало одной степенью свободы, теперь две величины (фазы) являются произвольными, т. е. движение обладает двумя степенями свободы. Потеря устойчивости периодическим движением, сопровождающаяся «рождением» двумерного тора, типична для гидродинамики.

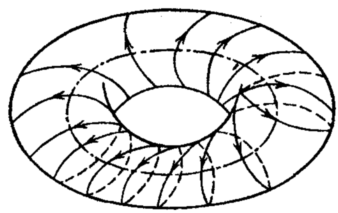

Рис. 18

Обсудим гипотетическую картину усложнения течения, возникшего в результате такой бифуркации, при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса, $R > R_{кр2}$. Естественно было бы предположить, что при последующем увеличении R будут последо-

[1]) Отметим, что мультипликатор не может быть равным нулю: возмущение не может обратиться в нуль за конечное время (один период T_1).

[2]) Мы пользуемся математической терминологией, согласно которой тором называют поверхность без заключенного в ней объема. Так, двумерный тор — двумерная поверхность трехмерного «бублика».

вательно появляться все новые периоды. На языке геометрических образов это означает потерю устойчивости двумерным тором с возникновением в его окрестности трехмерного тора, затем в результате очередной бифуркации ему на смену придет четырехмерный тор и т. д. Интервалы между числами Рейнольдса, соответствующими появлению новых частот, быстро падают, а появляющиеся движения имеют все меньшие масштабы. Таким образом, движение быстро приобретает сложный и запутанный характер; его называют *турбулентным* в отличие от *ламинарного*, правильного течения, при котором жидкость движется как бы слоями, обладающими различными скоростями.

Полагая сейчас, что такой путь (или, как говорят, *сценарий*) возникновения турбулентности действительно возможен[1]), напишем общий вид функции $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, зависимость которой от времени определяется некоторым числом N различных частот ω_i. Ее можно рассматривать как функцию N различных фаз $\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$ (и от координат), причем по каждой из них она периодична с периодом 2π. Такая функция может быть представлена в виде ряда

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum \mathbf{A}_{p_1 p_2 \ldots p_N}(\mathbf{r}) \exp\left\{-i \sum_{i=1}^{N} p_i \varphi_i\right\}, \qquad (30,2)$$

представляющего собой обобщение (26,13) (суммирование по всем целым числам $p_1, p_2, \ldots, p_N$). Описываемое такой формулой движение обладает N степенями свободы — в него входят N произвольных начальных фаз β_i[2]).

Состояния, фазы которых отличаются только на целое кратное 2π, физически тождественны. Другими словами, все существенно различные значения каждой из фаз лежат в интервале $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi$. Рассмотрим какую-нибудь пару фаз $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ и $\varphi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Пусть в некоторый момент времени фаза φ_1 имеет значение α. Тогда «одинаковые» с α значения фаза φ_1 будет иметь и во все моменты времени

$$t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi s \frac{1}{\omega_1},$$

где s — любое целое число. Фаза φ_2 в эти моменты имеет значения

$$\varphi_2 = \beta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1 + 2\pi s).$$

---

[1]) Он был выдвинут *Л. Д. Ландау* (1944) и затем независимо *Хопфом* (*E. Hopf*, 1948).

[2]) Если выбрать фазы φ_i в качестве координат, описывающих траекторию на N-мерном торе, то соответствующие скорости будут постоянными величинами: $\dot{\varphi}_i = \omega_i$. В связи с этим о квазипериодическом движении говорят как о движении на торе с постоянной скоростью.

Но различные частоты несоизмеримы друг с другом, так что ω_2/ω_1 — иррациональное число. Приводя каждый раз посредством вычитания должного целого кратного от 2π значение φ_2 к интервалу между 0 и 2π, мы получим поэтому, при пробегании числом s значений от 0 до ∞, для φ_2 значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу в этом интервале. Другими словами, в течение достаточно большого промежутка времени φ_1 и φ_2 одновременно пройдут сколь угодно близко к любой паре наперед заданных значений. То же самое относится и ко всем фазам. Таким образом, в рассматриваемой модели турбулентности в течение достаточно долгого времени жидкость проходит через состояния, сколь угодно близкие к любому наперед заданному состоянию, определенному любым возможным набором одновременных значений фаз φ_i. Время возврата, однако, очень быстро растет с увеличением N и становится столь большим, что фактически никакого следа какой-либо периодичности не остается [1]).

Подчеркнем теперь, что рассмотренный путь возникновения турбулентности базируется, по существу, на линейных представлениях. Действительно, фактически предполагалось, что при появлении в результате развития вторичных неустойчивостей новых периодических решений уже имевшиеся периодические решения не только не исчезают, но и почти не меняются. В данной модели турбулентное движение есть просто суперпозиция большого числа таких неизменяющихся решений. В общем же случае, однако, характер решений при увеличении числа Рейнольдса и потери ими устойчивости изменяется. Возмущения взаимодействуют друг с другом, причем это может привести как к упрощению движения, так и к его усложнению. Проиллюстрируем первую возможность.

Ограничимся простейшим случаем: будем полагать, что возмущенное решение содержит всего лишь две независимые частоты. Как уже говорилось, геометрическим образом такого течения является незамкнутая намотка на двумерном торе. Возмущение на частоте ω_1, возникшее при $R = R_{кр1}$, естественно считать в окрестности числа $R = R_{кр2}$ (при котором возникает возмущение частоты ω_2) более интенсивным и поэтому полагать его неизменным при относительно небольших изменениях числа R в этой окрестности. Имея это в виду, для описания эволюции возмущения с частотой ω_2 на фоне периодического движения

[1]) В установившемся турбулентном режиме описанного типа вероятность нахождения системы (жидкости) в заданном малом объеме вокруг избранной точки пространства фаз $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ дается отношением величины этого объема $(\delta\varphi)^N$ к полному объему $(2\pi)^N$. Поэтому можно сказать, что за достаточно большой промежуток времени лишь в течение его доли $e^{-\varkappa N}$ (где $\varkappa = \ln(2\pi/\delta\varphi)$) система будет находиться в окрестности заданной точки.

частоты ω_1 введем новую переменную

$$a_2(t) = |a_2(t)|e^{-i\varphi_2(t)}; \tag{30,3}$$

модуль $|a_2|$ — кратчайшее расстояние до образующей тора (ставшего неустойчивым предельного цикла частоты ω_1), т. е. относительная амплитуда вторичного периодического течения, а φ_2 — его фаза. Рассмотрим поведение $a_2(t)$ в дискретные моменты времени, кратные периоду $T_1 = 2\pi/\omega_1$. За время одного периода возмущение частоты ω_2 меняется в μ раз, где

$$\mu = |\mu|\exp(-2\pi i\omega_2/\omega_1)$$

— его мультипликатор; по истечении целого числа τ таких периодов функция a_2 умножится на μ^τ. Мы считаем надкритичность $R - R_{кр_2}$ малой; тогда инкремент возрастания возмущения тоже мал и, соответственно, разность $|\mu| - 1$ хоть и положительна, но мала, так что за период T_1 возмущение a_2 меняется по модулю незначительно; фаза же φ_2 меняется просто пропорционально τ. Имея все это в виду, можно перейти к рассмотрению дискретной переменной τ как непрерывной и описывать ход изменения функции $a_2(\tau)$ дифференциальным по τ уравнением.

Понятие о мультипликаторе относится к самым малым временам после наступления неустойчивости, когда возмущение еще описывается линейными уравнениями. В этой области функция $a_2(\tau)$ меняется, согласно сказанному, как μ^τ, а ее производная

$$\frac{da_2}{d\tau} = \ln\mu \cdot a_2(\tau),$$

причем для малых надкритичностей:

$$\ln\mu = \ln|\mu| - 2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx |\mu| - 1 - 2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{30,4}$$

Это выражение — первый член разложения $da_2/d\tau$ по степеням a_2 и a_2^*, и при увеличении модуля $|a_2|$ (но пока он все же остается малым) надо учесть следующий член. Член, содержащий тот же осциллирующий множитель $e^{-i\varphi_2}$, есть член третьего порядка: $\sim a_2|a_2|^2$. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{da_2}{d\tau} = \ln\mu \cdot a_2 - \beta_2 a_2|a_2|^2, \tag{30,5}$$

где β_2 (как и μ) — комплексный параметр, зависящий от R, причем $\operatorname{Re}\beta_2 > 0$ (ср. аналогичные рассуждения в связи с уравнением (26,7)). Вещественная часть этого уравнения сразу определяет стационарное значение модуля:

$$|a_2^{(0)}|^2 = (|\mu| - 1)/\operatorname{Re}\beta_2.$$

Мнимая же часть дает уравнение для фазы $\varphi_2(\tau)$; после установления стационарного значения модуля, оно принимает вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1} + \operatorname{Im}\beta_2\cdot|a_2^{(0)}|^2. \tag{30,6}$$

Согласно этому уравнению фаза φ_2 вращается с постоянной скоростью. Это свойство, однако, связано лишь с рассматриваемым приближением; с ростом надкритичности $R - R_{кр2}$ равномерность нарушается и скорость вращения по тору становится сама функцией φ_2. Чтобы учесть это, добавим в правую сторону уравнения (30,6) малое возмущение $\Phi(\varphi_2)$; поскольку все физически различные значения φ_2 заключены в одном интервале от 0 до 2π, функция $\Phi(\varphi_2)$ — периодическая с периодом 2π. Далее, аппроксимируем иррациональное отношение ω_2/ω_1 рациональной дробью (это можно сделать со сколь угодной степенью точности) $\omega_2/\omega_1 = m_2/m_1 + \Delta$, где m_1, m_2 — целые числа. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = 2\pi\frac{m_2}{m_1} + \Delta + \operatorname{Im}\beta_2\cdot|a_2^{(0)}|^2 + \Phi(\varphi_2). \tag{30,7}$$

Будем теперь рассматривать значения фазы лишь в моменты времени, кратные m_1T_1, т. е. при значениях переменной $\tau = m_1\bar{\tau}$ где $\bar{\tau}$ — целое число. Первый член в правой части (30,7) приводит за время m_1T_1 к изменению фазы на $2\pi m_2$, т. е. на целое, кратное 2π, которое можно просто опустить. После этого вся правая часть уравнения оказывается малой величиной, и это позволяет описывать изменение функции $\varphi_2(\bar{\tau})$ дифференциальным уравнением по непрерывной переменной $\bar{\tau}$:

$$\frac{1}{m_1}\frac{d\varphi_2}{d\bar{\tau}} = \Delta + \operatorname{Im}\beta_2\cdot|a_2^{(0)}|^2 + \Phi(\varphi_2) \tag{30,8}$$

(на одном шаге изменения дискретной переменной $\bar{\tau}$ функция φ_2/m_1 меняется незначительно).

В общем случае уравнение (30,8) имеет стационарные решения $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$, определяющиеся обращением в ноль правой стороны уравнения. Но неизменность фазы φ_2 в моменты времени, кратные m_1T_1, означает, что на торе существует предельный цикл — траектория через m_1 оборотов замыкается. Ввиду периодичности функции $\Phi(\varphi_2)$ такие решения появляются парами (в простейшем случае — одна пара): одно решение на возрастающем, а другое — на убывающем участках функции $\Phi(\varphi_2)$. Из этих двух решений устойчиво только последнее, для которого вблизи точки $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$ уравнение (30,8) имеет вид:

$$\frac{d\varphi_2}{d\bar{\tau}} = -\,\mathrm{const}\cdot\left(\varphi_2 - \varphi_2^{(0)}\right)$$

(с коэффициентом const > 0) и действительно имеет решение, стремящееся к $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$; второе же решение неустойчиво (для него const < 0).

Рождение устойчивого предельного цикла на торе означает *синхронизацию* колебаний [1]) — исчезновение квазипериодического и установление нового периодического режима. Это явление, которое в системе со многими степенями свободы может произойти многими способами, препятствует возникновению режима, представляющего собой суперпозицию движений с большим числом несоизмеримых частот. В этом смысле можно сказать, что вероятность реального осуществления именно сценария Ландау — Хопфа очень мала (этим не исключается, конечно, в частных случаях возможность возникновения нескольких несоизмеримых частот прежде, чем произойдет их синхронизация).

§ 31. Странный аттрактор

Исчерпывающей теории возникновения турбулентности в различных типах гидродинамических течений в настоящее время еще не существует. Был выдвинут, однако, ряд возможных сценариев процесса хаотизации движения, основанных главным образом на компьютерном исследовании модельных систем дифференциальных уравнений, и частично подтвержденных реальными гидродинамическими экспериментами. Дальнейшее изложение в этом и следующем параграфах имеет своей целью лишь дать представление об этих идеях, не входя в обсуждение соответствующих компьютерных и экспериментальных результатов. Отметим лишь, что экспериментальные данные относятся к гидродинамическим движениям в ограниченных объемах; именно такие движения мы и будем иметь в виду ниже [2]).

Прежде всего сделаем следующее общее важное замечание. При анализе устойчивости периодического движения интересны лишь те мультипликаторы, которые по модулю близки к 1 — именно они при небольшом изменении R могут пересечь единичную окружность. Для течения вязкой жидкости число таких «опасных» мультипликаторов всегда конечно по следующей причине. Допускаемые уравнениями движения различные типы (моды) возмущений обладают разными пространственными масштабами (т. е. длинами расстояний, на которых существенно меняется скорость $\mathbf{v}_2$). Чем меньше масштаб движения, тем

[1]) По английской терминологии — frequency locking.

[2]) Фактически речь идет о тепловой конвекции в ограниченных объемах и о куэттовском движении между двумя коаксиальными цилиндрами конечной длины. Теоретические представления о механизме турбулизации пограничного слоя и следа за обтекаемым конечным телом в настоящее время еще слабо развиты, несмотря на накопленный значительный экспериментальный материал.