(с коэффициентом const > 0) и действительно имеет решение, стремящееся к $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$; второе же решение неустойчиво (для него const < 0).

Рождение устойчивого предельного цикла на торе означает *синхронизацию* колебаний [1]) — исчезновение квазипериодического и установление нового периодического режима. Это явление, которое в системе со многими степенями свободы может произойти многими способами, препятствует возникновению режима, представляющего собой суперпозицию движений с большим числом несоизмеримых частот. В этом смысле можно сказать, что вероятность реального осуществления именно сценария Ландау — Хопфа очень мала (этим не исключается, конечно, в частных случаях возможность возникновения нескольких несоизмеримых частот прежде, чем произойдет их синхронизация).

## § 31. Странный аттрактор

Исчерпывающей теории возникновения турбулентности в различных типах гидродинамических течений в настоящее время еще не существует. Был выдвинут, однако, ряд возможных сценариев процесса хаотизации движения, основанных главным образом на компьютерном исследовании модельных систем дифференциальных уравнений, и частично подтвержденных реальными гидродинамическими экспериментами. Дальнейшее изложение в этом и следующем параграфах имеет своей целью лишь дать представление об этих идеях, не входя в обсуждение соответствующих компьютерных и экспериментальных результатов. Отметим лишь, что экспериментальные данные относятся к гидродинамическим движениям в ограниченных объемах; именно такие движения мы и будем иметь в виду ниже [2]).

Прежде всего сделаем следующее общее важное замечание. При анализе устойчивости периодического движения интересны лишь те мультипликаторы, которые по модулю близки к 1 — именно они при небольшом изменении R могут пересечь единичную окружность. Для течения вязкой жидкости число таких «опасных» мультипликаторов всегда конечно по следующей причине. Допускаемые уравнениями движения различные типы (моды) возмущений обладают разными пространственными масштабами (т. е. длинами расстояний, на которых существенно меняется скорость $\mathbf{v}_2$). Чем меньше масштаб движения, тем

---

[1]) По английской терминологии — frequency locking.

[2]) Фактически речь идет о тепловой конвекции в ограниченных объемах и о куэттовском движении между двумя коаксиальными цилиндрами конечной длины. Теоретические представления о механизме турбулизации пограничного слоя и следа за обтекаемым конечным телом в настоящее время еще слабо развиты, несмотря на накопленный значительный экспериментальный материал.

больше градиенты скорости в нем и тем сильнее оно тормозится вязкостью. Если расположить допустимые моды в порядке убывания их масштабов, то опасным может оказаться только некоторое конечное число первых из них; достаточно далекие в этом ряду заведомо окажутся сильно затухающими, т. е. им будут отвечать малые по модулю мультипликаторы. Это обстоятельство позволяет считать, что выяснение возможных типов потери устойчивости периодическим движением вязкой жидкости может производиться по существу так же, как и анализ устойчивости периодического движения диссипативной дискретной механической системы, описываемой конечным числом переменных (в гидродинамическом аспекте этими переменными могут, например, быть амплитуды компонент разложения поля скоростей в ряд Фурье по координатам). Соответственно этому становится конечномерным и пространство состояний.

С математической точки зрения речь идет об исследовании эволюции системы, описываемой уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{31,1}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор в пространстве $n$ величин $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, описывающих систему; функция $\mathbf{F}$ зависит от параметра, изменение которого может приводить к изменению характера движения[1]). Для диссипативной системы дивергенция вектора $\dot{\mathbf{x}}$ в $\mathbf{x}$-пространстве отрицательна, чем выражается сокращение объемов $\mathbf{x}$-пространства при движении[2]):

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div}\mathbf{F} \equiv \partial F^{(i)}/\partial x^{(i)} < 0. \tag{31,2}$$

Вернемся к обсуждению возможных результатов взаимодействия разных периодических движений. Явление синхронизации упрощает движение. Но взаимодействие может разрушить квазипериодичность также и в направлении существенного усложнения картины. До сих пор молчаливо подразумевалось, что при потере устойчивости периодическим движением возникает в дополнение к нему другое периодическое движение. Логически же это вовсе не обязательно. Ограниченность амплитуд пульсаций скорости обеспечивает лишь ограниченность объема пространства состояний, внутри которого располагаются траектории, соответствующие установившемуся режиму течения вязкой жидкости, но как выглядит картина траекторий в этом объеме априори ничего сказать нельзя. Траектории могут стремиться к предельному

---

[1]) По математической терминологии функцию $\mathbf{F}$ называют векторным полем системы. Если оно не зависит явно от времени (как в (31,1)), систему называют автономной.

[2]) Напомним, что для гамильтоновой механической системы эта дивергенция равна нулю согласно теореме Лиувилля; компонентами вектора $x$ являются при этом обобщенные координаты $q$ и импульсы $p$ системы.

циклу или к незамкнутой намотке на торе (соответственно образам периодического или квазипериодического движений), но могут вести себя и совершенно по-иному — сложно и запутанно. Именно эта возможность чрезвычайно существенна для понимания математической природы и выяснения механизма возникновения турбулентности.

Представить себе сложное и запутанное поведение траекторий внутри ограниченного объема, куда траектории только входят, можно, если предположить, что все траектории в нем неустойчивы. Среди них могут быть не только неустойчивые циклы, но и незамкнутые траектории бесконечно блуждающие внутри ограниченной области, не выходя из нее. Неустойчивость означает, что две сколь угодно близкие точки пространства состояний, передвигаясь в дальнейшем по проходящим через них траекториям, далеко разойдутся; первоначально близкие точки могут относиться и к одной и той же траектории: ввиду ограниченности области незамкнутая траектория может подойти к самой себе сколь угодно близко. Именно такое сложное, нерегулярное поведение траекторий и ассоциируется с турбулентным движением жидкости.

Эта картина имеет еще и другой аспект — чувствительная зависимость течения от малого изменения начальных условий. Если движение устойчиво, то малая неточность в задании начальных условий приведет лишь к аналогичной неточности в определении конечного состояния. Если же движение неустойчиво, то исходная неточность со временем нарастает и дальнейшее состояние системы уже невозможно предвидеть (*Н. С. Крылов*, 1944; *M. Born*, 1952).

Притягивающее множество неустойчивых траекторий в пространстве состояний диссипативной системы действительно может существовать (*E. Lorenz*, 1963); его принято называть *стохастическим*, или *странным аттрактором* [1]).

На первый взгляд, требование о неустойчивости всех траекторий, принадлежащих аттрактору, и требование о том, чтобы все соседние траектории при $t \to \infty$ к нему стремились, кажутся несовместимыми, поскольку неустойчивость означает разбегание траекторий. Это кажущееся противоречие устраняется если учесть, что траектории могут быть неустойчивыми по одним направлениям в пространстве состояний и устойчивыми (т. е. притягивающими) по другим. В $n$-мерном пространстве состояний

[1]) В отличие от обычных аттракторов (устойчивые предельные циклы, предельные точки и т. п.); название аттрактора «странный» связано со сложностью его структуры, о которой будет идти речь ниже. В физической литературе термином «странный аттрактор» обозначают и более сложные притягивающие множества, содержащие помимо неустойчивых также и устойчивые траектории, но со столь малыми областями притяжения, что ни в физическом, ни в численном экспериментах их нельзя обнаружить.

траектории, принадлежащие странному аттрактору, не могут быть неустойчивы по всем $(n-1)$-направлениям (одно направление отвечает движению вдоль траектории), так как это означало бы непрерывный рост начального объема в пространстве состояний, что для диссипативной системы невозможно. Следовательно, по одним направлениям соседние траектории к траекториям аттрактора стремятся, а по другим — неустойчивым — от них уходят (рис. 19). Такие траектории называют *седловыми*, и именно множество таких траекторий составляет странный аттрактор.

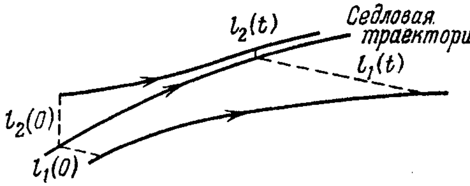


Рис. 19

Странный аттрактор может появиться уже после нескольких бифуркаций возникновения новых периодов: даже сколь угодно малая нелинейность может разрушить квазипериодический режим (незамкнутая обмотка на торе), создав на торе странный аттрактор (*D. Ruelle*, *F. Takens*, 1971). Это, однако, не может произойти на второй (начиная с разрушения стационарного режима) бифуркации. При этой бифуркации появляется незамкнутая обмотка на двумерном торе. Учет малой нелинейности не разрушает тора, так что странный аттрактор должен был бы быть расположен на нем. Но на двумерной поверхности невозможно существование притягивающего множества неустойчивых траекторий. Дело в том, что траектории в пространстве состояний не могут пересекаться друг с другом (или сами с собой); это противоречило бы причинности поведения классических систем: состояние системы в каждый момент времени однозначно определяет ее поведение в следующие моменты. На двумерной поверхности невозможность пересечений настолько упорядочивает поток траекторий, что его хаотизация невозможна.

Но уже на третьей бифуркации возникновение странного аттрактора становится возможным (хотя и не обязательным!). Такой аттрактор, приходящий на смену трехчастотному квазипериодическому режиму, расположен на трехмерном торе (*S. Newhouse*, *D. Ruelle*, *F. Takens*, 1978).

Принадлежащие странному аттрактору сложные, запутанные траектории расположены в ограниченном объеме пространства состояний. Классификация возможных типов странных аттракторов, которые могут встретиться в реальных гидродинамических задачах, в настоящее время неизвестна; неясны даже критерии, на которых должна была бы основываться такая классификация. Существующие знания о структуре странных аттракторов основаны в основном лишь на изучении примеров, возникающих при компьютерном решении модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, довольно далеких от реальных гидродинамических уравнений. О структуре странного аттрактора можно, однако, высказать некоторые общие суждения, следующие уже из неустойчивости (седлового типа) траекторий и диссипативности системы.

Для наглядности будем говорить о трехмерном пространстве состояний и представлять себе аттрактор расположенным внутри двумерного тора. Рассмотрим пучок траекторий на пути к аттрактору (ими описываются переходные режимы движения жидкости, ведущие к установлению «стационарной» турбулентности). В поперечном сечении пучка траектории (точнее — их следы) заполняют определенную площадь; проследим за изменением величины и формы этой площади вдоль пучка. Учтем, что элемент объема в окрестности седловой траектории в одном из (поперечных) направлений растягивается, а в другом — сжимается; ввиду диссипативности системы сжатие сильнее, чем растяжение — объемы должны уменьшаться. По ходу траекторий эти направления должны меняться — в противном случае траектории ушли бы слишком далеко (что означало бы слишком большое изменение скорости жидкости). Все это приведет к тому, что сечение пучка уменьшится по площади и приобретет сплющенную, и в то же время изогнутую форму. Но этот процесс должен происходить не только с сечением пучка в целом, но и с каждым элементом его площади. В результате сечение пучка разбивается на систему вложенных друг в друга полос, разделенных пустотами. С течением времени (т. е. вдоль пучка траекторий) число полос быстро возрастает, а их ширины убывают. Возникающий в пределе $t \to \infty$ аттрактор представляет собой несчетное множество бесконечного числа не касающихся друг друга слоев — поверхностей, на которых располагаются седловые траектории (своими притягивающими направлениями обращенные «наружу» аттрактора). Своими боковыми сторонами и своими концами эти слои сложным образом соединяются друг с другом; каждая из принадлежащих аттрактору траекторий блуждает по всем слоям и по прошествии достаточно большого времени пройдет достаточно близко к любой точке аттрактора (свойство *эргодичности*). Общий объем слоев и общая площадь их сечений равны нулю.

По математической терминологии, такие множества по одному из направлений относятся к категории *канторовых*. Именно канторовость структуры следует считать наиболее характерным свойством аттрактора и в более общем случае $n$-мерного ($n > 3$) пространства состояний.

Объем странного аттрактора в своем пространстве состояний всегда равен нулю. Он может, однако, быть ненулевым в другом пространстве — меньшей размерности. Последнее определяется следующим образом. Разобьем все $n$-мерное пространство на малые кубики с длиной ребра $\varepsilon$ и объемом $\varepsilon^n$. Пусть $N(\varepsilon)$ — минимальное число кубиков, совокупность которых полностью покрывает аттрактор. Определим размерность $D$ аттрактора как предел [1])

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}. \qquad (1,3)$$

Существование этого предела означает конечность объема аттрактора в $D$-мерном пространстве: при малом $\varepsilon$ имеем $N(\varepsilon) \approx \approx V\varepsilon^{-D}$ (где $V$ — постоянная), откуда видно, что $N(\varepsilon)$ можно рассматривать как число $D$-мерных кубиков, покрывающих в $D$-мерном пространстве объем $V$. Определенная согласно (31,3) размерность не может, очевидно, превышать полную размерность $n$ пространства состояний, но может быть меньше его и, в отличие от привычной размерности, может быть дробной; именно такова она для канторовых множеств [2]).

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Если турбулентное движение уже установилось (течение «вышло на странный аттрактор»), то такое движение диссипативной системы (вязкой жидкости) в принципе не отличается от стохастического движения бездиссипативной системы с меньшей размерностью пространства состояний. Это связано с тем, что для установившегося движения вязкая диссипация энергии в среднем за большое время компенсируется энергией, поступающей от среднего течения (или от другого источника неравновесности). Следовательно, если следить за эволюцией во времени принадлежащего аттрактору элемента «объема» (в некотором пространстве, размерность которого определяется размерностью аттрактора), то этот объем в среднем будет сохраняться — его сжатие в одних направлениях будет в среднем компенсироваться растяжением за счет расходимости близких траекторий в других направлениях. Этим свойством можно воспользоваться, чтобы получить иным способом оценку размерности аттрактора.

Ввиду упомянутой уже эргодичности движения на странном аттракторе, его средние характеристики могут быть установлены путем анализа движения уже вдоль одной принадлежащей аттрактору неустойчивой траектории в пространстве состояний.

---

[1]) Эта величина известна в математике как предельная емкость множества. Ее определение близко к определению так называемой хаусдорфовой (или фрактальной) размерности.

[2]) Покрывающие множество $n$-мерные кубики могут оказаться «почти пустыми»; именно поэтому может быть $D < n$. Для обычных множеств определение (31,3) дает очевидные результаты. Так, для множества $N$ изолированных точек имеем $N(\varepsilon) = N$ и $D = 0$; для отрезка $L$ линии: $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$, $D = 1$; для площадки $S$ двумерной поверхности: $N(\varepsilon) = S/\varepsilon^2$, $D = 2$, и т. д.

Другими словами, предполагаем, что индивидуальная траектория воспроизводит свойства аттрактора, если двигаться по ней бесконечно долгое время.

Пусть $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)$ — уравнение такой траектории, одно из решений уравнений (31,1). Рассмотрим деформацию «сферического» элемента объема при его перемещении вдоль этой траектории. Она определяется уравнениями (31,1), линеаризованными по разности $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(t)$ — отклонению траекторий, соседних с данной. Эти уравнения, написанные в компонентах, имеют вид

$$\dot{\xi}^{(i)}=A_{ik}(t)\,\xi^{(k)},\quad A_{ik}(t)=\left.\frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}}\right|_{x=x_0(t)}. \tag{31,4}$$

При сдвиге вдоль траектории элемент объема в одних направлениях сжимается, в других растягивается и сфера превращается в эллипсоид. По мере движения вдоль траектории как направления полуосей эллипсоида, так и их длины меняются; обозначим последние посредством $l_s(t)$, где индекс $s$ нумерует направления. *Ляпуновскими характеристическими показателями* называют предельные значения

$$L_s=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{l_s(t)}{l(0)}, \tag{31,5}$$

где $l(0)$ — радиус исходной сферы (в момент времени, условно выбранный как $t=0$). Определенные таким образом величины — вещественные числа, число которых равно размерности $n$ пространства. Одно из этих чисел (отвечающее направлению вдоль самой траектории) равно нулю[1]).

Сумма ляпуновских показателей определяет среднее вдоль траектории изменение элементарного объема в пространстве состояний. Локальное относительное изменение объема в каждой точке траектории дается дивергенцией $\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}}=\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{\xi}}=A_{ii}(t)$. Можно показать, что среднее вдоль траектории значение дивергенции[2]):

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{\xi}}\,dt=\sum_{s=1}^{n}L_s. \tag{31,6}$$

Для диссипативной системы эта сумма отрицательна — объемы в $n$-мерном пространстве состояний сжимаются. Размерность же

---

[1]) Разумеется, решение уравнений (31,4) (с заданными начальными условиями при $t=0$) фактически описывает соседнюю траекторию лишь до тех пор, пока все расстояния $l_s(t)$ остаются малыми. Это обстоятельство, однако, не лишает смысла определение (31,5), в котором используются сколь угодно большие времена: для всякого большого $t$ можно выбрать настолько малое $l(0)$, что линеаризованные уравнения останутся справедливыми для всего этого времени.

[2]) См. *Оселедец В. И.* — Труды Мос. мат. Общества, 1968, т. 19, с. 179.

странного аттрактора определим таким образом, чтобы в «его пространстве» объемы в среднем сохранялись. Для этого расположим ляпуновские показатели в порядке $L_1 \geqslant L_2 \geqslant \ldots \geqslant L_n$ и учтем столько устойчивых направлений, сколько надо для компенсации растяжения сжатием. Определенная таким образом размерность аттрактора (обозначим ее $D_L$) будет лежать между $m$ и $m+1$, где $m$ — число показателей в указанной последовательности, сумма которых еще положительна, но после прибавления $L_{m+1}$ становится отрицательной[1]). Дробная часть размерности $D_L = m + d$ $(d < 1)$ находится из равенства

$$\sum_{s=1}^{m} L_s + L_{m+1} d = 0 \qquad (31,7)$$

(*F. Ledrappier*, 1981). Поскольку при вычислении $d$ учитываются лишь наименее устойчивые направления (отбрасываются наибольшие по абсолютной величине отрицательные показатели $L_s$ в конце их последовательности), то даваемая величиной $D_L$ оценка размерности есть, вообще говоря, оценка сверху. Эта оценка открывает, в принципе, путь для определения размерности аттрактора по экспериментальным измерениям временного хода пульсаций скорости в турбулентном потоке.

## § 32. Переход к турбулентности путем удвоения периодов

Рассмотрим теперь потерю устойчивости периодическим движением путем прохождения мультипликатора через значение $-1$ или $+1$.

В $n$-мерном пространстве состояний $n-1$ мультипликаторов определяют поведение траекторий в $n-1$ различных направлениях в окрестности рассматриваемой периодической траектории (отличных от направления касательной в каждой точке самой этой траектории). Пусть близкий к $\pm 1$ мультипликатор отвечает некоторому $l$-му направлению. Остальные $n-2$ мультипликаторов малы по модулю; поэтому по соответствующим им $n-2$ направлениям все траектории будут со временем прижиматься к некоторой двумерной поверхности (назовем ее $\Sigma$), которой принадлежат $l$-е направление и направление указанных касательных. Можно сказать, что в окрестности предельного цикла пространство состояний при $t \to \infty$ оказывается почти двумерным (строго двумерным оно не может быть — траектории могут располагаться по обе стороны $\Sigma$ и переходить с одной стороны поверхности на другую). Разрежем поток траекторий вблизи $\Sigma$ некоторой секущей поверхностью $\sigma$. Каждая траектория, повторно пересекая $\sigma$, ставит в соответствие исходной точке

---

[1]) Учет равного нулю ляпуновского показателя вносит в размерность $D_L$ вклад $+1$, отвечающий размерности вдоль самой траектории.