

странного аттрактора определим таким образом, чтобы в «его пространстве» объемы в среднем сохранялись. Для этого расположим ляпуновские показатели в порядке  $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_n$  и учтем столько устойчивых направлений, сколько надо для компенсации растяжения сжатием. Определенная таким образом размерность аттрактора (обозначим ее  $D_L$ ) будет лежать между  $m$  и  $m+1$ , где  $m$  — число показателей в указанной последовательности, сумма которых еще положительна, но после прибавления  $L_{m+1}$  становится отрицательной<sup>1)</sup>. Дробная часть размерности  $D_L = m + d$  ( $d < 1$ ) находится из равенства

$$\sum_{s=1}^m L_s + L_{m+1} d = 0 \quad (31,7)$$

(F. Ledrappier, 1981). Поскольку при вычислении  $d$  учитываются лишь наименее устойчивые направления (отбрасываются наибольшие по абсолютной величине отрицательные показатели  $L_s$  в конце их последовательности), то даваемая величиной  $D_L$  оценка размерности есть, вообще говоря, оценка сверху. Эта оценка открывает, в принципе, путь для определения размерности аттрактора по экспериментальным измерениям временного хода пульсаций скорости в турбулентном потоке.

### § 32. Переход к турбулентности путем удвоения периодов

Рассмотрим теперь потерю устойчивости периодическим движением путем прохождения мультипликатора через значение  $-1$  или  $+1$ .

В  $n$ -мерном пространстве состояний  $n-1$  мультипликаторов определяют поведение траекторий в  $n-1$  различных направлениях в окрестности рассматриваемой периодической траектории (отличных от направления касательной в каждой точке самой этой траектории). Пусть близкий к  $\pm 1$  мультипликатор отвечает некоторому  $l$ -му направлению. Остальные  $n-2$  мультипликаторов малы по модулю; поэтому по соответствующим им  $n-2$  направлениям все траектории будут со временем прижиматься к некоторой двумерной поверхности (назовем ее  $\Sigma$ ), которой принадлежат  $l$ -е направление и направление указанных касательных. Можно сказать, что в окрестности предельного цикла пространство состояний при  $t \rightarrow \infty$  оказывается почти двумерным (строго двумерным оно не может быть — траектории могут располагаться по обе стороны  $\Sigma$  и переходить с одной стороны поверхности на другую). Разрежем поток траекторий вблизи  $\Sigma$  некоторой секущей поверхностью  $\sigma$ . Каждая траектория, повторно пересекая  $\sigma$ , ставит в соответствие исходной точке

<sup>1)</sup> Учет равно нулю ляпуновского показателя вносит в размерность  $D_L$  вклад  $+1$ , отвечающий размерности вдоль самой траектории.

пересечения (назовем ее  $x_j$ ) точку пересечения в момент следующего возврата  $x_{j+1}$ . Связь  $x_{j+1} = f(x_j; R)$  называют *отображением Пуанкаре* (или *отображением последования*); она зависит от параметра  $R$  (в данном случае — числа Рейнольдса<sup>1)</sup>), значение которого определяет степень близости к бифуркации — потере устойчивости периодическим движением. Поскольку все траектории тесно прижаты к поверхности  $\Sigma$ , множество точек пересечения поверхности  $\sigma$  траекториями оказывается почти одномерным, и его можно приближенно аппроксимировать линией; отображение Пуанкаре станет одномерным преобразованием

$$x_{j+1} = f(x_j; R), \quad (32,1)$$

причем  $x$  будет просто координатой на указанной линии<sup>2)</sup>. Дискретная переменная  $j$  играет роль времени, измеряемого в единицах периода движения.

Отображение (32,1) дает альтернативный способ определения характера течения вблизи бифуркации. Самому периодическому движению отвечает *неподвижная точка* преобразования (32,1) — значение  $x_j = x_*$ , не меняющееся при отображении, т. е. для которого  $x_{j+1} = x_j$ . Роль мультипликатора играет производная  $\mu = dx_{j+1}/dx_j$ , взятая в точке  $x_j = x_*$ . Точки  $x_j = x_* + \xi$  в окрестности  $x_*$  в результате отображения переходят в  $x_{j+1} \approx x_* + \mu\xi$ . неподвижная точка устойчива (и является аттрактором отображения), если  $|\mu| < 1$ : повторно применяя (*итерирруя*) отображение и начав с какой-либо точки в окрестности точки  $x_*$ , мы будем асимптотически приближаться к последней (по закону  $|\mu|^r$ , где  $r$  — число итераций). Напротив, при  $|\mu| > 1$  неподвижная точка неустойчива.

Рассмотрим потерю устойчивости периодическим движением при переходе мультипликатора через  $-1$ . Равенство  $\mu = -1$  означает, что начальное возмущение через интервал времени  $T_0$  меняет знак, не меняясь по абсолютной величине: еще через период  $T_0$  возмущение перейдет само в себя. Таким образом, при переходе  $\mu$  через значение  $-1$  в окрестности предельного цикла с периодом  $T_0$  возникает новый предельный цикл с периодом  $2T_0$  — *бифуркация удвоения периода*<sup>3)</sup>. На рис. 20 условно изображены две последовательные такие бифуркации; на рисунках *a, б* сплошными линиями показаны устойчивые циклы периодов  $2T_0, 4T_0$ , а штриховыми — ставшие неустойчивыми предыдущие циклы.

1) Или числа Рэлея, если речь идет о тепловой конвекции (§ 56).

2) Обозначение  $x$  в этом параграфе не имеет, разумеется, ничего общего с координатой в физическом пространстве!

3) В этом параграфе основной период, т. е. период первого периодического движения, обозначаем как  $T_0$  (а не  $T_1$ ). Критические значения числа Рейнольдса, отвечающие последовательным бифуркациям удвоения периода, будем обозначать здесь посредством  $R_1, R_2, \dots$ , опуская индекс «кр» (число  $R_i$  заменяет прежнее  $R_{кр i}$ ).

Если принять условно неподвижную точку отображения Пуанкаре за точку  $x = 0$ , то вблизи нее отображение, описывающее бифуркацию удвоения периода можно представить в виде разложения

$$x_{j+1} = -[1 + (R - R_1)]x_j + x_j^2 + \beta x_j^3, \quad (32,2)$$

где  $\beta > 0$ <sup>1)</sup>. При  $R < R_1$  неподвижная точка  $x_* = 0$  устойчива, а при  $R > R_1$  — неустойчива. Чтобы увидеть, как происходит удвоение периода, надо итерировать отображение (32,2) дважды, т. е. рассмотреть его за два шага (две единицы времени) и определить неподвижные точки вновь полученного отображения; если они существуют и устойчивы, то они и отвечают циклу удвоенного периода.

Двукратная итерация преобразования (32,2) приводит (с нужной точностью по малым величинам  $x_j$  и  $R - R_1$ ) к отображению

$$x_{j+2} = x_j + 2(R - R_1)x_j - 2(1 + \beta)x_j^3. \quad (32,3)$$

Оно всегда имеет неподвижную точку  $x_* = 0$ . При  $R < R_1$  эта точка единственна и устойчива (мультипликатор  $|dx_{j+2}/dx_j| < 1$ ); для движения с периодом 1 (в единицах  $T_0$ ) интервал времени 2 — тоже период. При  $R = R_1$  мультипликатор обращается в +1 и при  $R > R_1$  точка  $x_* = 0$  становится неустойчивой. В этот момент рождается пара устойчивых неподвижных точек

$$x_*^{(1), (2)} = \pm \left[ \frac{R - R_1}{1 + \beta} \right]^{1/2}, \quad (32,4)$$

которые и соответствуют устойчивому предельному циклу удвоенного периода<sup>2)</sup>; преобразование (32,3) оставляет каждую из этих точек на месте, а преобразование (32,2) переводит каждую из них в другую. Подчеркнем, что цикл единичного периода при описанной бифуркации не исчезает — он остается решением уравнений движения, но неустойчивым.

Вблизи бифуркации движение остается еще «почти периодическим» с периодом 1: точки последовательных возвратов траек-

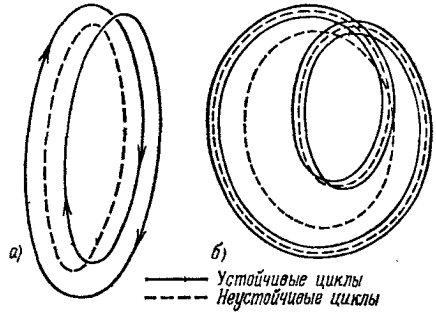


Рис. 20

<sup>1)</sup> Коэффициент при  $R - R_1$  может быть обращен в единицу соответствующим переопределением  $R$ , а коэффициент при  $x_j^2$  обращен в +1 переопределением  $x_j$  (что и предполагается в (32,2)).

<sup>2)</sup> Или, как мы будем говорить для краткости, 2-циклу. Относящиеся к нему неподвижные точки будем называть элементами цикла.

тории  $x_1^{(1)}$  и  $x_2^{(2)}$  близки друг к другу. Интервал  $x_1^{(1)} - x_2^{(2)}$  между ними является мерой амплитуды колебаний с периодом 2; она растет с надкритичностью как  $(R - R_1)^{1/2}$  — аналогично закону (26,10) возрастания амплитуды периодического движения после его возникновения в точке потери устойчивости стационарным движением.

Многочисленное повторение бифуркаций удвоения периода открывает один из возможных путей возникновения турбулентности. В этом сценарии число бифуркаций бесконечно, причем они следуют друг за другом (по мере увеличения  $R$ ) через все убывающие интервалы; последовательность критических значений  $R_1, R_2, \dots$  стремится к конечному пределу, за которым периодичность исчезает вовсе и в пространстве возникает сложный аperiodический аттрактор, ассоциируемый в этом сценарии с возникновением турбулентности. Мы увидим, что этот сценарий обладает замечательными свойствами универсальности и масштабной инвариантности (*M. J. Feigenbaum, 1978*)<sup>1)</sup>.

Излагаемая ниже количественная теория исходит из предпосылки, что бифуркации следуют друг за другом (при увеличении  $R$ ) настолько быстро, что даже в промежутках между ними занимаемая множеством траекторий область пространства состояний остается почти двумерной, и вся последовательность бифуркаций может быть описана одномерным отображением Пуанкаре, зависящим от одного параметра.

Выбор рассматриваемого ниже отображения естествен в силу следующих соображений. В значительной части интервала изменения переменной  $x$  отображение должно быть «растягивающим»,  $|df(x; \lambda)/dx| > 1$ ; это дает возможность возникновения неустойчивостей. Отображение должно также возвращать траектории, выходящие за границы некоторого интервала, обратно в него; противное означало бы неограниченное возрастание амплитуд пульсаций скорости, что невозможно. Общим этим требованиям вместе могут удовлетворять лишь немонотонные функции  $f(x; \lambda)$ , т. е. не взаимнооднозначные отображения (32,1): значение  $x_{j+1}$  однозначно определяется предшествующим значением  $x_j$ , но не наоборот. Простейший вид такой функции — функция с одним максимумом; в окрестности максимума положим

$$x_{j+1} = f(x_j; \lambda) = 1 - \lambda x_j^2, \quad (32,5)$$

где  $\lambda$  — положительный параметр, который надо рассматривать

<sup>1)</sup> Последовательность бифуркаций удвоения периода (нумеруемых далее порядковыми номерами 1, 2, ...) не обязательно должна начинаться с первой же бифуркации периодического движения. Она может, в принципе, начинаться и после нескольких первых бифуркаций с возникновением несоизмеримых частот, после их синхронизации за счет рассмотренного в § 30 механизма.

(в гидродинамическом аспекте) как возрастающую функцию  $R^1$ ). Примем условно отрезок  $[-1, +1]$  как интервал изменения величины  $x$ ; при  $\lambda$  между 0 и 2 все итерации отображения (32,5) оставляют  $x$  в этом же интервале.

Преобразование (32,5) имеет неподвижную точку — корень уравнения  $x_* = 1 - \lambda x_*^2$ . Эта точка становится неустойчивой при  $\lambda > \Lambda_1$ , где  $\Lambda_1$  — значение параметра  $\lambda$ , для которого мультипликатор  $\mu = -2\lambda x_* = -1$ ; из двух написанных уравнений находим  $\Lambda_1 = 3/4$ . Это — первое критическое значение параметра  $\lambda$ , определяющее момент первой бифуркации удвоения периода: появления 2-цикла. Проследим за появлением последующих бифуркаций с помощью приближенного приема, позволяющего выяснить некоторые качественные особенности процесса, хотя и не дающего точных значений характерных констант; затем будут сформулированы точные утверждения.

Повторив преобразование (32,5) дважды, получим

$$x_{j+2} = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x_j^2 - \lambda^3 x_j^4. \quad (32,6)$$

Пренебрежем здесь последним слагаемым — четвертой степени по  $x_j$ . Оставшееся равенство масштабным преобразованием<sup>2)</sup>

$$x_j \rightarrow x_j/\alpha_0, \quad \alpha_0 = 1/(1 - \lambda)$$

приводится к виду

$$x_{j+2} = 1 - \lambda_1 x_j^2,$$

отличающемуся от (32,5) лишь заменой параметра  $\lambda$  на

$$\lambda_1 = \varphi(\lambda) \equiv 2\lambda^2(\lambda - 1). \quad (32,7)$$

Повторяя эту операцию с масштабными множителями  $\alpha_1 = 1/(1 - \lambda_1)$ , ..., получим ряд последовательных отображений того же вида:

$$x_{j+2}^m = 1 - \lambda_m x_j^2, \quad \lambda_m = \varphi(\lambda_{m-1}). \quad (32,8)$$

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что допустимость не взаимно-однозначных отображений связана с приближенностью одномерного рассмотрения. Если бы все траектории располагались строго на одной поверхности  $\Sigma$  (так что отображение Пуанкаре было бы строго одномерным), подобная неоднозначность была бы невозможна: она означала бы пересечение траекторий (две траектории с различными  $x_j$  пересекались бы в точке  $x_{j+1}$ ). В этом же смысле следствием приближенности является возможность обращения в нуль мультипликатора — если неподвижная точка отображения расположена в экстремуме отображающей функции (такая точка может быть названа «сверхустойчивой» — приближение к ней происходит по закону более быстрому, чем указанный выше).

<sup>2)</sup> Это преобразование невозможно при значении  $\lambda = 1$  (при котором неподвижная точка отображения (32,6) совпадает с центральным экстремумом:  $x_* = 0$ ). Это значение, однако, заведомо не является интересующим нас следующим критическим значением  $\Lambda_2$ .

Неподвижные точки отображений (32,8) отвечают  $2^m$ -циклам<sup>1)</sup>. Поскольку все эти отображения имеют тот же вид, что и (32,5), то можно сразу заключить, что  $2^m$ -циклы ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) становятся неустойчивыми при  $\lambda_m = \Lambda_1 = 3/4$ . Соответствующие же критические значения  $\Lambda_m$  исходного параметра  $\lambda$  получаются путем решения цепочки уравнений

$$\Lambda_1 = \varphi(\Lambda_2), \quad \Lambda_2 = \varphi(\Lambda_3), \quad \dots, \quad \Lambda_{m-1} = \varphi(\Lambda_m);$$

графически они даются построением, показанным на рис. 21. Очевидно, что при  $m \rightarrow \infty$  последовательность этих чисел

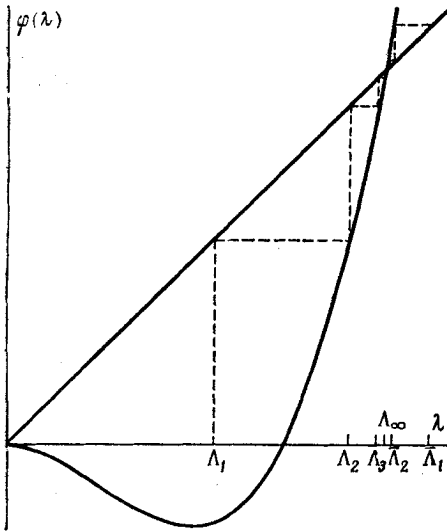


Рис. 21

сходится к конечному пределу  $\Lambda_\infty$  — корню уравнения  $\Lambda_\infty = \varphi(\Lambda_\infty)$ ; он равен  $\Lambda_\infty = (1 + \sqrt{3})/2 = 1,37$ . К конечному пределу стремятся и масштабные множители:  $\alpha_m \rightarrow \alpha$ , где  $\alpha = 1/(1 - \Lambda_\infty) = -2,8$ .

Легко найти закон, по которому происходит приближение  $\Lambda_m$  к  $\Lambda_\infty$  при больших  $m$ . Из уравнения  $\Lambda_m = \varphi(\Lambda_{m+1})$  при малых разностях  $\Lambda_\infty - \Lambda_m$  находим

$$\Lambda_\infty - \Lambda_{m+1} = \frac{1}{\delta} (\Lambda_\infty - \Lambda_m), \quad (32,9)$$

где  $\delta = \varphi'(\Lambda_\infty) = 4 + \sqrt{3} = 5,73$ . Другими словами,  $\Lambda_\infty - \Lambda_m \propto \delta^m$ , т. е. значения  $\Lambda_m$  приближаются к

пределу по закону геометрической прогрессии. По такому же закону меняются интервалы между последовательными критическими числами: (32,9) можно переписать в эквивалентном виде

$$\Lambda_{m+2} - \Lambda_{m+1} = \frac{1}{\delta} (\Lambda_{m+1} - \Lambda_m). \quad (32,10)$$

В гидродинамическом аспекте, как уже указывалось, параметр  $\lambda$  надо рассматривать как функцию числа Рейнольдса, соответственно чему появляются критические значения послед-

<sup>1)</sup> Во избежание недоразумений подчеркнем, что после произведенных масштабных преобразований отображения (32,8) должны быть определены теперь на растянутых интервалах  $|x| \leq |\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m \cdot 1|$  (а не на  $|x| \leq 1$ , как в (32,5—6)). Однако в силу сделанных пренебрежений выражения (32,8) могут фактически описывать лишь область вблизи центральных экстремумов отображающих функций.

него, отвечающие последовательным бифуркациям удвоения периода и стремящиеся к конечному пределу  $R_\infty$ . Очевидно, что для этих значений справедливы те же предельные законы (32,9—10) (с той же постоянной  $\delta$ ), что и для чисел  $\Lambda_m$ .

Изложенные рассуждения иллюстрируют происхождение основных закономерностей процесса: бесконечное множество бифуркаций, моменты появления которых сходятся к пределу  $\Lambda_\infty$  по закону (32,9—10); появление масштабного множителя  $\alpha$ . Полученные при этом значения характерных констант, однако, не точны. Точные значения (полученные путем многократного компьютерного итерирования отображения (32,5)) показателя сходимости  $\delta$  (число Фейгенбаума) и масштабного множителя  $\alpha$ :

$$\delta = 4,6692 \dots, \quad \alpha = -2,5029 \dots \quad (32,11)$$

а предельное значение  $\Lambda_\infty = 1,401^1$ ). Обратим внимание на сравнительно большое значение  $\delta$ ; быстрая сходимость приводит к тому, что предельные законы хорошо выполняются уже после небольшого числа удвоений периода.

Дефект произведенного вывода состоит и в том, что после пренебрежения всеми степенями  $x_j^2$ , кроме первой, отображение (32,8) позволяет установить лишь факт возникновения следующей бифуркации, но не дает возможности определить все элементы описываемого этим отображением  $2^m$ -цикла<sup>2)</sup>. В действительности итерированные отображения (32,5) представляют собой полиномы по  $x_j^2$ , степень которых при каждой итерации возрастает вдвое. Они представляют собой сложные функции от  $x_j$  с быстро возрастающим числом экстремумов, симметрично расположенных по отношению к точке  $x_j = 0$  (которая тоже всегда остается экстремумом).

Замечательно, что не только значения  $\delta$  и  $\alpha$ , но и предельный вид самого бесконечнократно итерированного отображения оказываются в определенном смысле независимыми от вида начального отображения  $x_{j+1} = f(x_j; \lambda)$ : достаточно, чтобы зависящая от одного параметра функция  $f(x; \lambda)$  была гладкой функцией с одним квадратичным максимумом (пусть это будет в точ-

<sup>1)</sup> Значение  $\Lambda_\infty$  имеет несколько условный характер, поскольку оно зависит от способа введения параметра в исходное отображение — функцию  $f(x; \lambda)$  (значения же  $\delta$  и  $\alpha$  от этого не зависят вовсе).

<sup>2)</sup> То есть все  $2^m$  точки  $x_*^{(1)}, x_*^{(2)}, \dots$ , переходящие последовательно друг в друга (периодические) при итерациях отображения (31,5) и неподвижные (и устойчивые) по отношению к  $2^m$ -кратно итерированному отображению. Отметим, во избежание возможных вопросов, что производные  $dx_{j+2^m}/dx_j$  во всех точках  $x_*^{(1)}, x_*^{(2)}, \dots$  автоматически одинаковы (и потому одновременно проходят через  $-1$  в момент следующей бифуркации); мы не будем приводить здесь рассуждений, использующих правило дифференцирования функции от функции, доказывающих это свойство (необходимость которого заранее очевидна).

ке  $x = 0$ ); она не обязана даже быть симметричной относительно этой точки вдали от нее. Это свойство *универсальности* существенно увеличивает степень общности излагаемой теории. Его точная формулировка состоит в следующем.

Рассмотрим отображение, задаваемое функцией  $f(x)$  (функция  $f(x; \lambda)$  с определенным выбором  $\lambda$  — см. ниже), нормированной условием  $f(0) = 1$ . Применив его дважды, получим функцию  $f(f(x))$ . Изменим масштаб как самой этой функции, так и переменной  $x$  в  $\alpha_0 = 1/f(1)$  раз; таким образом получим новую функцию

$$f_1(x) = \alpha_0 f(f(x/\alpha_0)),$$

для которой снова будет  $f_1(0) = 1$ . Повторяя эту операцию, получим последовательность функций, связанных рекуррентным соотношением<sup>1)</sup>

$$f_{m+1}(x) = \alpha_m f_m(f_m(x/\alpha_m)) \equiv \hat{T}f_m, \quad \alpha_m = 1/f_m(1). \quad (32,12)$$

Если эта последовательность стремится при  $m \rightarrow \infty$  к некоторой определенной предельной функции  $f_\infty(x) \equiv g(x)$ , эта последняя должна быть «неподвижной функцией» определенного в (32,12) оператора  $\hat{T}$ , т. е. должна удовлетворять функциональному уравнению

$$g(x) = \hat{T}g \equiv \alpha g(g(x/\alpha)), \quad \alpha = 1/g(1), \quad g(0) = 1. \quad (32,13)$$

В силу предположенных свойств допустимых функций  $f(x)$ , функция  $g(x)$  должна быть гладкой и иметь квадратичный экстремум в точке  $x = 0$ ; никакого другого следа от конкретного вида  $f(x)$  в уравнении (32,13) или в налагаемых на его решение условиях не остается. Подчеркнем, что после произведенных при выводе масштабных преобразований (с  $|\alpha_m| > 1$ ) решение уравнения определяется при всех значениях фигурирующей в нем переменной  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  (а не только на интервале  $-1 \leq x \leq 1$ ). Функция  $g(x)$  автоматически является четной по  $x$ ; она должна быть такой, поскольку среди допустимых функций  $f(x)$  имеются четные, а четное отображение заведомо остается четным после любого числа итераций.

Такое решение уравнения (32,13) действительно существует и единственно (хотя и не может быть построено в аналитическом виде); оно представляет собой функцию с бесконечным числом экстремумов, неограниченную по своей величине; постоянная  $\alpha$  определяется вместе с самой функцией  $g(x)$ . Фактически достаточно построить эту функцию на интервале  $[-1, 1]$ , после чего она может быть продолжена за его пределы итерированием операции  $\hat{T}$ . Обратим внимание на то, что на каждом шаге ите-

<sup>1)</sup> Отметим очевидную аналогию этой процедуры с использованной выше при выводе (32,8).



рирования  $T$  в (32,12) значения функции  $f_{m+1}(x)$  на интервале  $[-1, 1]$  определяются значениями функции  $f_m(x)$  на сокращенной в  $|\alpha_m| \approx |\alpha|$  раз части этого отрезка. Это значит, что в пределе многократных итераций для определения функции  $g(x)$  на интервале  $[-1, 1]$  (а тем самым и на всей оси  $x$ ) существенны все меньшие и меньшие части исходной функции вблизи ее максимума; в этом и состоит, в конечном итоге, источник универсальности<sup>1)</sup>.

Функция  $g(x)$  определяет структуру аperiodического аттрактора, возникающего в результате бесконечной последовательности удвоений периода. Но это происходит при вполне определенном для функции  $f(x; \lambda)$  значении параметра  $\lambda = \lambda_\infty$ . Ясно поэтому, что функции, образованные из  $f(x; \lambda)$  путем многократного итерирования преобразования (32,12), действительно сходятся к  $g(x)$  лишь при этом изолированном значении  $\lambda$ . Отсюда в свою очередь следует, что неподвижная функция оператора  $T$  неустойчива по отношению к ее малым изменениям, отвечающим малым отклонениям параметра  $\lambda$  от значения  $\lambda_\infty$ . Исследование этой неустойчивости дает возможность определения универсальной постоянной  $\delta$  — снова без всякой связи с конкретным видом функции  $f(x)$ <sup>2)</sup>.

Масштабный множитель  $\alpha$  определяет изменение — уменьшение — геометрических (в пространстве состояний) характеристик аттрактора на каждом шаге удвоений периода; этими характеристиками являются расстояния между элементами предельных циклов на оси  $x$ . Поскольку, однако, каждое удвоение сопровождается еще и увеличением числа элементов цикла, это утверждение должно быть конкретизировано и уточнено. При этом заранее ясно, что закон изменения масштаба не может быть одинаковым для расстояний между всякими двумя точками<sup>3)</sup>. Действительно, если две близкие точки преобразуются через почти линейный участок функции отображения, расстояние между ними уменьшится в  $|\alpha|$  раз; если же преобразование про-

<sup>1)</sup> Уверенность в существовании единственного решения уравнения (32,13) основана на компьютерном моделировании. Решение ищется (на интервале  $[-1, 1]$ ) в виде полинома высокой степени по  $x^2$ ; точность моделирования должна быть тем выше, чем до более широкой области значений  $x$  (вне указанного отрезка) мы хотели бы затем продолжить функцию итерированием  $T$ . На интервале  $[-1, 1]$  функция  $g(x)$  имеет один экстремум, вблизи которого  $g(x) = 1 - 1,528x^2$  (если считать экстремум максимумом; этот выбор условий ввиду инвариантности уравнения (32,13) относительно изменения знака  $g$ ).

<sup>2)</sup> См. оригинальные статьи: *Feigenbaum M. J.* — *J. Stat. Phys.*, 1978, v. 19, p. 25; 1979, v. 21, p. 669.

<sup>3)</sup> Имеются в виду расстояния на нерастяннутом отрезке  $[-1, 1]$ , условно выбранном с самого начала как интервал изменения  $x$ , на котором расположены все элементы циклов. Отрицательность  $\alpha$  означает, что при бифуркации происходит также инверсия расположения элементов относительно точки  $x = 0$ .

исходит через участок функции отображения вблизи ее экстремума — расстояние сократится в  $\alpha^2$  раз.

В момент бифуркации (при  $\lambda = \Lambda_m$ ) каждый элемент (точка)  $2^m$ -цикла расщепляется на пару — две близкие точки, расстояние между которыми постепенно возрастает, но точки остаются ближайшими друг к другу на всем протяжении изменения  $\lambda$  до следующей бифуркации. Если следить за переходами элементов цикла друг в друга с течением времени (т. е. при последовательных отображениях  $x_{j+1} = f(x_j; \lambda)$ ), то каждая из компонент пары перейдет в другую через  $2^m$  единиц времени. Это значит, что расстояние между точками пары измеряет амплитуду колебаний вновь возникающего удвоенного периода, и в этом смысле представляет особый физический интерес.

Расположим все элементы  $2^{m+1}$ -цикла в том порядке, в котором они обходятся со временем, и обозначим их как  $x_{m+1}(t)$ , где время  $t$  (измеренное в единицах основного периода  $T_0$ ) пробегает целочисленные значения  $t/T_0 = 1, 2, \dots, 2^{m+1}$ . Эти элементы возникают из элементов  $2^m$ -цикла расщеплением последних на пары. Интервалы между точками каждой пары даются разностями

$$\xi_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) - x_{m+1}(t + T_m), \quad (32,14)$$

где  $T_m = 2^m T_0 = T_{m+1}/2$  — период  $2^m$ -цикла, т. е. половина периода  $2^{m+1}$ -цикла. Введем функцию  $\sigma_m(t)$  — масштабный множитель, определяющий изменение интервалов (32,14) при переходе от одного цикла к следующему<sup>1)</sup>:

$$\xi_{m+1}(t)/\xi_m(t) = \sigma_m(t). \quad (32,15)$$

Очевидно, что

$$\xi_{m+1}(t + T_m) = -\xi_{m+1}(t), \quad (32,16)$$

и поэтому

$$\sigma_m(t + T_m) = -\sigma_m(t). \quad (32,17)$$

Функция  $\sigma_m(t)$  имеет сложные свойства, но можно показать, что ее предельный (при больших  $m$ ) вид с хорошей точностью аппроксимируется простым образом:

$$\sigma_m(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{при } 0 < t < T_m/2, \\ 1/\alpha^2 & \text{при } T_m/2 < t < T_m \end{cases} \quad (32,18)$$

(при надлежащем выборе начала отсчета  $t$ )<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Поскольку оба цикла существуют в разных интервалах значений параметра  $\lambda$  (на интервалах  $(\Lambda_{m-1}, \Lambda_m)$  и  $(\Lambda_m, \Lambda_{m+1})$ , и на этих интервалах величины (32,14) существенно меняются, то их смысл в определении (32,15) нуждается в уточнении. Будем понимать их при тех значениях параметра  $\lambda$ , когда циклы «сверхустойчивы» (см. примечание на с. 173); по одному такому значению имеется в области существования каждого цикла.

<sup>2)</sup> Мы не будем приводить здесь в принципе простого, но громоздкого исследования свойств функции  $\sigma_m(t)$ . См. Фейгенбаум М. — УФН, 1983, т. 141, с. 343 [Los Alamos Science, 1980, v. 1, p. 4].

Эти формулы позволяют сделать некоторые заключения об изменении спектра (частотного) движения жидкости, претерпевающей удвоения периода. В гидродинамическом аспекте величину  $x_m(t)$  надо понимать как характеристику скорости жидкости. Для движения с периодом  $T_m$  спектр функции  $x_m(t)$  (от непрерывного времени  $t$ !) содержит частоты  $k\omega_m$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) — основную частоту  $\omega_m = 2\pi/T_m$  и ее гармоники. После удвоения периода течение описывается функцией  $x_{m+1}(t)$  с периодом  $T_{m+1} = 2T_m$ . Ее спектральное разложение содержит, наряду с теми же частотами  $k\omega_m$ , еще и субгармоники частоты  $\omega_m$  — частоты  $l\omega_m/2$ ,  $l = 1, 3, 5, \dots$

Представим  $x_{m+1}(t)$  в виде

$$x_{m+1}(t) = \frac{1}{2} \{ \xi_{m+1}(t) + \eta_{m+1}(t) \},$$

где  $\xi_{m+1}$  — разность (32,14), а

$$\eta_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) + x_{m+1}(t + T_m).$$

Спектральное разложение  $\eta_{m+1}(t)$  содержит только частоты  $k\omega_m$ ; компоненты Фурье для субгармоник,

$$\frac{1}{T_{m+1}} \int_0^{T_{m+1}} \eta_{m+1}(t) e^{inlt/T_m} dt = \frac{1}{2T_m} \int_0^{T_m} \{ \eta_{m+1}(t) - \eta_{m+1}(t + T_m) \} e^{inlt/T_m} dt$$

обращаются в нуль в силу равенства  $\eta_{m+1}(t + T_m) = \eta_{m+1}(t)$ . С другой стороны, величины  $\eta_m(t)$  в первом приближении не меняются при бифуркации:  $\eta_{m+1}(t) \approx \eta_m(t)$ ; это значит, что интенсивность колебаний с частотами  $k\omega_m$  тоже остается неизменной.

Спектральное же разложение величин  $\xi_{m+1}(t)$  содержит, напротив, только субгармоники  $l\omega_m/2$  — новые частоты, появляющиеся на  $(m+1)$ -м шаге удвоений. Суммарная интенсивность этих спектральных компонент определяется интегралом

$$I_{m+1} = \frac{1}{T_{m+1}} \int_0^{T_{m+1}} \xi_{m+1}^2(t) dt. \quad (32,19)$$

Выразив  $\xi_{m+1}(t)$  через  $\xi_m(t)$ , пишем

$$I_{m+1} = \frac{1}{2T_m} 2 \int_0^{T_m} \sigma_m^2(t) \xi_m^2(t) dt.$$

С учетом (32,16—18) получим

$$I_{m+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} \right) \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \xi_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} \right) I_m,$$

и окончательно

$$I_m/I_{m+1} = 10,8. \quad (32,20)$$

Таким образом, интенсивность новых спектральных компонент, появляющихся после бифуркации удвоения периода, превышает таковую для следующей бифуркации в определенное, не зависящее от номера бифуркации, число раз (*M. J. Feigenbaum*, 1979)<sup>1)</sup>.

Обратимся к изучению эволюции свойств движения при дальнейшем увеличении параметра  $\lambda$  за значением  $\Lambda_\infty$  (числа Рейнольдса  $R > R_\infty$ ) — в «турбулентной» области. Поскольку в момент своего рождения (при  $\lambda = \Lambda_\infty$ ) аperiodический аттрактор описывается одномерным отображением Пуанкаре, можно считать, что и при значениях  $\lambda$ , незначительно превосходящих  $\Lambda_\infty$ , допустимо рассматривать свойства аттрактора в рамках такого отображения.

Аттрактор, возникший в результате бесконечной цепочки удвоений периода, в момент своего рождения не является странным в определенном в § 31 смысле: « $2^\infty$ -цикл», возникающий как предел устойчивых  $2^m$ -циклов при  $m \rightarrow \infty$ , тоже устойчив. Точки этого аттрактора образуют на отрезке  $[-1, 1]$  несчетное множество канторова типа. Его мера на этом отрезке (т. е. полная «длина» совокупности его элементов) равна нулю; его размерность лежит между 0 и 1 и оказывается равной 0,54<sup>2)</sup>.

При  $\lambda > \Lambda_\infty$  аттрактор становится странным — притягивающим множеством неустойчивых траекторий. На отрезке  $[-1, 1]$  принадлежащие ему точки заполняют интервалы, общая длина которых отлична от нуля. Эти отрезки — следы на секущей поверхности  $\sigma$  непрерывной двумерной ленты, совершающей большое число оборотов и замыкающейся на себя. Снова напомним в этой связи о приближенности одномерного рассмотрения. В действительности эта лента имеет небольшую, но конечную толщину. Поэтому и составляющие ее сечение отрезки представляют собой в действительности полоски конечной ширины. Вдоль этой ширины странный аттрактор имеет канторову структуру

<sup>1)</sup> Это относится не только к суммарной интенсивности появляющихся субгармоник, но и к интенсивности каждой из них. На каждую субгармонику, появляющуюся после  $m$ -й бифуркации, приходится по две (по одной справа и слева) субгармоники после  $(m + 1)$ -й бифуркации. Поэтому отношение интенсивностей отдельных новых появляющихся после двух последовательных бифуркаций спектральных пиков вдвое больше величины (32,20). Более точное значение этой величины 10,48. Оно получается путем анализа состояния в самой точке  $\lambda = \Lambda_\infty$  с помощью универсальной функции  $g(x)$ ; в этой точке присутствуют уже все частоты и вопрос, подобный указанному в примечании на с. 178 не возникает. См. *Nanenberg M., Rudnick J.* — *Phys. Rev.*, 1981, v. 24B, p. 493.

<sup>2)</sup> См. *Grassberger P.* — *J. Stat. Phys.*, 1981, v. 26, p. 173.

описанного в предыдущем параграфе слоистого характера<sup>1)</sup>. Ниже эта структура нас не будет интересовать, и мы возвращаемся к рассмотрению в рамках одномерного отображения Пуанкаре.

Эволюция свойств странного аттрактора при увеличении  $\lambda$  за  $\Lambda_\infty$  состоит в общих чертах в следующем. При заданном значении  $\lambda > \Lambda_\infty$  аттрактор заполняет ряд интервалов на отрезке  $[-1, 1]$ ; участки между этими интервалами — области притяжения аттрактора и в них же находятся элементы неустойчивых циклов с периодами, начиная от некоторого  $2^m$  и меньше. При увеличении  $\lambda$  скорость разбегания траекторий на странном аттракторе увеличивается, и он «разбухает», последовательно поглощая циклы периодов  $2^m, 2^{m+1}, \dots$ ; при этом число интервалов, занятых аттрактором, уменьшается, а их длины увеличиваются. Другими словами, число витков упомянутой выше ленты последовательно уменьшается вдвое, а их ширины увеличиваются. Таким образом, возникает как бы обратный каскад последовательных упрощений аттрактора. Поглощение аттрактором неустойчивого  $2^m$ -цикла называют *обратной бифуркацией*

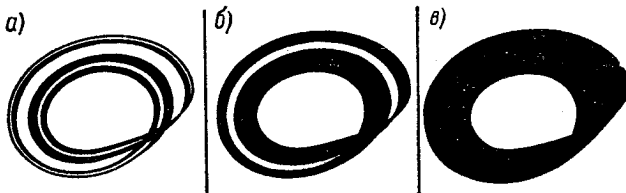


Рис. 22

*удвоения*. Рис. 22 иллюстрирует этот процесс для двух последних обратных бифуркаций. На рис. 22, а лента совершает четыре оборота, обратная бифуркация превращает ее в ленту с двумя оборотами (рис. 22, б); наконец, последняя бифуркация приводит к ленте, совершающей всего один оборот и замыкающейся на себя, предварительно «перекрутившись» (рис. 22, в).

Обозначим значения параметра  $\lambda$ , отвечающие последовательным обратным бифуркациям удвоения через  $\bar{\Lambda}_{m+1}$ , причем они расположены в последовательности  $\bar{\Lambda}_m > \bar{\Lambda}_{m+1}$ . Покажем, что эти числа удовлетворяют закону геометрической прогрессии с тем же универсальным показателем  $\delta$ , что и для прямых бифуркаций.

Перед последней (при увеличении  $\lambda$ ) обратной бифуркацией аттрактор занимает два интервала, разделенных промежутком,

<sup>1)</sup> Размерность аттрактора в этом направлении мала по сравнению с единицей. Она, однако, не универсальна и зависит от конкретного вида отображения.

в котором находится неподвижная точка  $x_*$  отображения (32,5), отвечающая неустойчивому циклу периода 1:

$$x_* = \frac{\sqrt{1+4\lambda} - 1}{2\lambda}.$$

Бифуркация произойдет при значении  $\lambda = \bar{\Lambda}_1$ , когда границы расширяющегося аттрактора достигнут этой точки. Из рис. 22, б видно, что внешняя граница аттрактора (ленты) после одного оборота становится его внутренней границей, а еще через оборот — границей интервала, разделяющего витки. Отсюда ясно, что значение  $\lambda = \bar{\Lambda}_1$  определяется условием  $x_{j+2} = x_*$ , где

$$x_{j+2} = 1 - \lambda(1 - \lambda)^2$$

есть результат двукратной итерации отображения над точкой  $x_j = 1$  — границей аттрактора (это значение  $\bar{\Lambda}_1 = 1,543$ ). Моменты предшествующих обратных бифуркаций  $\bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_3, \dots$  могут быть приближенно определены одно за другим с помощью рекуррентного соотношения, связывающего  $\bar{\Lambda}_{m+1}$  с  $\bar{\Lambda}_m$ . Это приближенное соотношение выводится тем же способом, которым была рассмотрена выше последовательность прямых бифуркаций удвоения и имеет вид  $\bar{\Lambda}_m = \varphi(\bar{\Lambda}_{m+1})$  с той же функцией  $\varphi(\Lambda)$  из (32,7). Соответствующее графическое построение показано на верхней части рис. 21. Поскольку функция  $\varphi(\Lambda)$  для последовательностей прямых и обратных бифуркаций одна и та же, то одинаков и закон, по которому последовательности чисел  $\Lambda_m$  и  $\bar{\Lambda}_m$  сходятся (соответственно снизу и сверху) к общему пределу  $\Lambda_\infty \equiv \bar{\Lambda}_\infty$ :

$$\bar{\Lambda}_{m+1} - \Lambda_\infty = \frac{1}{\delta} (\bar{\Lambda}_m - \Lambda_\infty). \quad (32,21)$$

Эволюция свойств странного аттрактора при  $\lambda > \Lambda_\infty$  сопровождается соответствующими изменениями в частотном спектре интенсивности. Хаотичность движения выражается в спектре появлением в нем «шумовой» компоненты, интенсивность которой возрастает вместе с шириной аттрактора. На этом фоне присутствуют дискретные пики, отвечающие основной частоте неустойчивых циклов, их гармоникам и субгармоникам; при последовательных обратных бифуркациях исчезают соответствующие субгармоники — в порядке, обратном тому, в котором они появлялись в последовательности прямых бифуркаций. Неустойчивость создающих эти частоты циклов проявляется в уширении спектральных пиков.

### Переход к турбулентности через перемежаемость

Рассмотрим, наконец, разрушение периодического движения при прохождении мультипликатора через значение  $\mu = +1$ .

Этот тип бифуркации описывается (в рамках одномерного отображения Пуанкаре) функцией  $x_{j+1} = f(x_j; R)$ , которая при определенном значении параметра (числа Рейнольдса),  $R = R_{кр}$ , касается прямой  $x_{j+1} = x_j$ . Выбрав точку касания в качестве  $x_j = 0$ , напишем вблизи нее разложение функции отображения в виде <sup>1)</sup>

$$x_{j+1} = (R - R_{кр}) + x_j + x_j^2. \quad (32,22)$$

При  $R < R_{кр}$  (см. рис. 23) существуют две неподвижные точки

$$x^{(1), (2)} = \mp (R_{кр} - R)^{1/2},$$

из которых одна ( $x^{(1)}$ ) отвечает устойчивому, а другая ( $x^{(2)}$ ) — неустойчивому периодическому движению. При  $R = R_{кр}$  мультипликатор в обеих точках становится равным  $+1$ , оба периодических движения сливаются и при  $R > R_{кр}$  исчезают (неподвижные точки переходят в комплексную область).

При малой надкритичности расстояние между линией (32,22) и прямой  $x_{j+1} = x_j$  мало (в области вблизи  $x_j = 0$ ). На этом интервале значений  $x$ , следовательно, каждая итерация отображения (32,22) лишь незначительно перемещает след траектории, и для прохождения им всего интервала потребуется много шагов. Другими словами, на сравнительно большом промежутке времени траектория в пространстве состояний будет иметь регулярный, почти периодический характер. Такой траектории отвечает в физическом пространстве регулярное (ламинарное) движение жидкости. Отсюда возникает еще один, в принципе возможный, сценарий возникновения турбулентности (P. Manneville, Y. Pomeau, 1980).

Можно представить себе, что к рассмотренному участку функции отображения примыкают участки, приводящие к хаотизации траекторий; им отвечает в пространстве состояний множество локально неустойчивых траекторий. Это множество, однако, само по себе не является аттрактором и с течением времени точ-

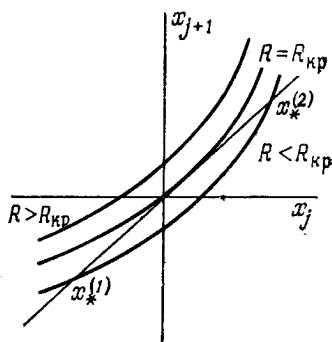


Рис. 23

<sup>1)</sup> Коэффициент при  $R - R_{кр}$  и коэффициент (положительный) при  $x_j^2$  можно обратить в единицу соответствующим определением  $R$  и  $x_j$ , что и предполагается в (32,22).

ка, изображающая систему, его покидает. При  $R < R_{кр}$  траектория выходит на устойчивый цикл, т. е. в физическом пространстве устанавливается ламинарное периодическое движение. При  $R > R_{кр}$  устойчивый цикл отсутствует и возникает движение, в котором «турбулентные» периоды чередуются с ламинарными (отсюда название сценария — переход через *перемежаемость*).

О длительности турбулентных периодов нельзя сделать каких-либо общих заключений. Зависимость же длительности ламинарных периодов от надкритичности легко выяснить. Для этого напомним разностное уравнение (32,22) в виде дифференциального. Имея в виду малость изменения  $x_i$  на одном шаге отображения, заменим разность  $x_{i+1} - x_i$  производной  $dx/dt$  по непрерывной переменной  $t$ :

$$dx/dt = (R - R_{кр}) + x^2. \quad (32,23)$$

Найдем время  $\tau$ , необходимое для прохождения отрезка между точками  $x_1$  и  $x_2$ , лежащими по обе стороны точки  $x = 0$  на расстояниях, больших по сравнению с  $(R - R_{кр})^{1/2}$ , но еще в области применимости разложения (32,22). Имеем

$$\tau = (R - R_{кр})^{-1/2} \arctg [x (R - R_{кр})^{-1/2}] \Big|_{x_1}^{x_2},$$

откуда

$$\tau \sim (R - R_{кр})^{-1/2}, \quad (32,24)$$

чем и определяется искомая зависимость; длительность ламинарных периодов убывает с ростом надкритичности.

В этом сценарии остается открытым как вопрос о пути подхода к его началу, так и вопрос о природе возникающей турбулентности.

### § 33. Развитая турбулентность

Турбулентное движение жидкости при достаточно больших значениях числа Рейнольдса характерно чрезвычайно нерегулярным, беспорядочным изменением скорости со временем в каждой точке потока (*развитая турбулентность*); скорость все время пульсирует около некоторого своего среднего значения. Такое же нерегулярное изменение скорости имеет место от точки к точке потока, рассматриваемого в заданный момент времени. В настоящее время полной количественной теории развитой турбулентности еще не существует. Известен, однако, ряд важных качественных результатов, изложению которых и посвящен настоящий параграф.

Введем понятие о средней скорости движения, получающейся в результате усреднения по большим промежуткам времени истинной скорости в каждой точке пространства. При таком