ка, изображающая систему, его покидает. При $R < R_{кр}$ траектория выходит на устойчивый цикл, т. е. в физическом пространстве устанавливается ламинарное периодическое движение. При $R > R_{кр}$ устойчивый цикл отсутствует и возникает движение, в котором «турбулентные» периоды чередуются с ламинарными (отсюда название сценария — переход через *перемежаемость*).

О длительности турбулентных периодов нельзя сделать каких-либо общих заключений. Зависимость же длительности ламинарных периодов от надкритичности легко выяснить. Для этого напишем разностное уравнение (32,22) в виде дифференциального. Имея в виду малость изменения x_j на одном шаге отображения, заменим разность $x_{j+1} - x_j$ производной dx/dt по непрерывной переменной t:

$$dx/dt = (R - R_{кр}) + x^2. \tag{32,23}$$

Найдем время τ, необходимое для прохождения отрезка между точками x_1 и x_2, лежащими по обе стороны точки $x = 0$ на расстояниях, больших по сравнению с $(R - R_{кр})^{1/2}$, но еще в области применимости разложения (32,22). Имеем

$$\tau = (R - R_{кр})^{-1/2} \operatorname{arctg} [x (R - R_{кр})^{-1/2}] \Big|_{x_1}^{x_2},$$

откуда

$$\tau \sim (R - R_{кр})^{-1/2}, \tag{32,24}$$

чем и определяется искомая зависимость; длительность ламинарных периодов убывает с ростом надкритичности.

В этом сценарии остается открытым как вопрос о пути подхода к его началу, так и вопрос о природе возникающей турбулентности.

§ 33. Развитая турбулентность

Турбулентное движение жидкости при достаточно больших значениях числа Рейнольдса характерно чрезвычайно нерегулярным, беспорядочным изменением скорости со временем в каждой точке потока (*развитая турбулентность*); скорость все время пульсирует около некоторого своего среднего значения. Такое же нерегулярное изменение скорости имеет место от точки к точке потока, рассматриваемого в заданный момент времени. В настоящее время полной количественной теории развитой турбулентности еще не существует. Известен, однако, ряд важных качественных результатов, изложению которых и посвящен настоящий параграф.

Введем понятие о средней скорости движения, получающейся в результате усреднения по большим промежуткам времени истинной скорости в каждой точке пространства. При таком усреднении нерегулярность изменения скорости сглаживается и средняя скорость оказывается плавно меняющейся вдоль потока функцией. Мы будем в дальнейшем обозначать среднюю скорость посредством $\mathbf{u}$. Разность $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ между истинной и средней скоростями, обнаруживающую характерное для турбулентности нерегулярное изменение, мы будем называть *пульсационной* частью скорости.

Рассмотрим подробнее характер накладывающегося на усредненный поток нерегулярного, пульсационного, движения. Это движение можно в свою очередь качественно рассматривать как результат наложения движений (*турбулентных пульсаций*) различных, как мы будем говорить, масштабов (под масштабом движения подразумевается порядок величины тех расстояний, на протяжении которых существенно меняется скорость движения). По мере возрастания числа Рейнольдса появляются сначала крупномасштабные пульсации; чем меньше масштаб движения, тем позже такие пульсации появляются. При очень больших числах Рейнольдса в турбулентном потоке присутствуют пульсации с масштабами от самых больших до очень малых. Основную же роль в турбулентном потоке играют крупномасштабные пульсации, масштаб которых — порядка величины характеристических длин, определяющих размеры области, в которой происходит турбулентное движение; в дальнейшем будем обозначать порядок величины этого *основного* (или *внешнего*) масштаба турбулентного движения посредством l. Эти крупномасштабные движения обладают наибольшими амплитудами. Их скорость по порядку величины сравнима с изменениями Δu средней скорости на протяжении расстояний l (мы говорим здесь о порядке величины не самой скорости, а ее изменения, поскольку именно оно характеризует скорость турбулентного движения; абсолютная же величина средней скорости может быть произвольной в зависимости от того, в какой системе отсчета рассматривается движение)[1]. Что же касается частот этих крупномасштабных пульсаций, то они — порядка отношения u/l средней скорости u (а не ее изменения Δu) к размерам l. Действительно, частота определяет период повторяемости картины движения, наблюдаемой из некоторой неподвижной системы отсчёта. Но относительно такой системы вся эта картина движется вместе со всей жидкостью со скоростью порядка u.

Мелкомасштабные же пульсации, соответствующие большим частотам, участвуют в турбулентном потоке со значительно меньшими амплитудами. Их можно рассматривать как мелкую детальную структуру, накладывающуюся на основные крупномас-

[1]) В действительности, по-видимому, масштабы основных пульсаций в несколько раз меньше, чем характерные размеры l, а их скорость — в несколько раз меньше, чем Δu.

штабные турбулентные движения. В мелкомасштабных пульсациях заключена лишь сравнительно малая часть всей кинетической энергии жидкости.

Из описанной картины турбулентного движения можно сделать заключение о характере изменения пульсационной скорости вдоль потока (рассматриваемого в заданный момент времени). На протяжении больших расстояний (сравнимых с l) изменение пульсационной скорости определяется изменением скорости крупномасштабных пульсаций и потому сравнимо по величине с Δu. На малых же (по сравнению с l) расстояниях оно определяется мелкомасштабными пульсациями и потому мало по сравнению с Δu (но велико по сравнению с изменением средней скорости на том же малом расстоянии). Такая же картина имеет место, если наблюдать изменение скорости со временем в заданной точке пространства. На протяжении малых (по сравнению с характеристическим временем $T \sim l/u$) интервалов времени скорость испытывает незначительные изменения; в течение же больших промежутков времени скорость меняется на величины $\sim \Delta u$.

В число Рейнольдса R, определяющее свойства течения жидкости в целом, в качестве характеристических размеров входит длина l. Наряду с таким числом, можно ввести качественное понятие о числах Рейнольдса турбулентных пульсаций различных масштабов. Если λ — масштаб пульсаций, а v_λ — порядок величины их скорости, то $R_\lambda \sim v_\lambda \lambda/\nu$. Это число тем меньше, чем меньше масштаб движения.

При больших R велики также и числа Рейнольдса R_λ крупномасштабных пульсаций. Но большие числа Рейнольдса эквивалентны малым вязкостям. Отсюда можно заключить, что для крупномасштабного движения, являющегося как раз основным во всяком турбулентном потоке, вязкость жидкости не играет роли. Поэтому в крупномасштабных пульсациях не происходит и заметной диссипации энергии.

Вязкость жидкости становится существенной только для самых мелкомасштабных пульсаций, для которых $R_\lambda \sim 1$ (масштаб λ_0 этих пульсаций будет определен ниже в этом параграфе). Именно в этих мелкомасштабных пульсациях, не существенных с точки зрения общей картины движения жидкости в турбулентном потоке, и происходит диссипация энергии.

Мы приходим, таким образом, к следующему представлению о диссипации энергии при турбулентном движении (*L. Richardson*, 1922). От пульсаций с бо́льшими масштабами энергия переходит в пульсации с меньшими масштабами, практически не диссипируясь при этом. Можно сказать, что имеется как бы непрерывный поток энергии от крупно- к мелкомасштабным пульсациям, т. е. от малых частот к большим. Этот поток диссипируется, т. е. кинетическая энергия переходит в тепло, в самых мелкомасштабных пульсациях. Разумеется, для поддержания «стационарного» состояния потока необходимо наличие внешних источников энергии, непрерывно передающих ее основному крупномасштабному движению.

Поскольку вязкость жидкости существенна только для самых мелкомасштабных пульсаций, то можно утверждать, что все величины, относящиеся к турбулентному движению в масштабах $\lambda \gg \lambda_0$, не могут зависеть от ν (более точно, эти величины не должны меняться при изменении ν и неизменных остальных условиях, в которых происходит движение). Это обстоятельство сужает круг величин, определяющих свойства турбулентного движения, в результате чего для исследования турбулентности приобретают большое значение соображения подобия, связанные с размерностью имеющихся в нашем распоряжении величин.

Применим такие соображения к определению порядка величины диссипации энергии при турбулентном движении. Пусть ε есть среднее количество энергии, диссипируемой в единицу времени в единице массы жидкости[1]). Мы видели, что эта энергия черпается из крупномасштабного движения, откуда постепенно передается во все меньшие масштабы, пока не диссипируется в пульсациях масштаба $\sim\lambda_0$. Поэтому, несмотря на то, что диссипация обязана в конце концов вязкости жидкости, порядок величины ε может быть определен с помощью одних только величин, характерных для крупномасштабных движений. Таковыми являются плотность жидкости ρ, размеры l и скорость Δu. Из этих трех величин можно составить всего одну комбинацию, обладающую той же размерностью, что и ε, т. е. эрг/г·с = см^2/с^3. Таким способом получаем:

$$\varepsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{l}, \qquad (33,1)$$

чем и определяется порядок величины диссипации энергии в турбулентном потоке.

Турбулентно движущуюся жидкость можно в некоторых отношениях качественно описывать как жидкость, обладающую некоторой, как говорят, *турбулентной вязкостью* $\nu_{\text{турб}}$, отличной от истинной кинематической вязкости ν. Характеризуя свойства турбулентного движения, $\nu_{\text{турб}}$ должно по порядку величины определяться величинами ρ, Δu, l. Единственной составленной из них величиной с размерностью кинематической вязкости является $\Delta u \cdot l$, поэтому

$$\nu_{\text{турб}} \sim \Delta u \cdot l. \qquad (33,2)$$

---

[1]) В этой главе буква ε будет обозначать среднюю диссипацию энергии, а не внутреннюю энергию жидкости!

Отношение турбулентной вязкости к обычной

$$\nu_{\text{турб}}/\nu \sim \mathrm{R}, \tag{33,3}$$

т. е. растет с числом Рейнольдса[1]).

Диссипация энергии выражается через $\nu_{\text{турб}}$ формулой

$$\varepsilon \sim \nu_{\text{турб}}(\Delta u/l)^2, \tag{33,4}$$

в соответствии с обычным определением вязкости. В то время как ν определяет диссипацию энергии по производным от истинной скорости по координатам, турбулентная вязкость связывает диссипацию с градиентом ($\sim\Delta u/l$) средней скорости движения.

Наконец, укажем, что порядок величины Δp изменения давления на протяжении области турбулентного движения тоже может быть определен из соображений подобия:

$$\Delta p \sim \rho(\Delta u)^2. \tag{33,5}$$

Стоящее справа выражение — единственная величина размерности давления, которую можно составить из ρ, l и Δu.

Перейдем теперь к изучению свойств развитой турбулентности в масштабах λ, малых по сравнению с основным масштабом l. Об этих свойствах говорят как о локальных свойствах турбулентности. При этом мы будем рассматривать жидкость вдали от твердых стенок, — точнее, на расстояниях от них, больших по сравнению с λ.

О такой мелкомасштабной турбулентности вдали от твердых тел можно высказать естественное предположение, что она обладает свойствами однородности и изотропии. Последнее означает, что в участках, размеры которых малы по сравнению с l, свойства турбулентного движения одинаковы по всем направлениям; в частности, они не зависят от направления скорости усредненного движения. Подчеркнем, что здесь и везде ниже в этом параграфе, где говорится о свойствах турбулентного движения в малом участке жидкости, подразумевается относительное движение жидких частиц в этом участке, а не абсолютное движение, в котором принимает участие весь участок в целом и которое связано с движением более крупных масштабов.

Оказывается возможным получить ряд существенных результатов о локальных свойствах турбулентности непосредственно из соображений подобия (*А. Н. Колмогоров*, 1941; *А. М. Обухов*, 1941).

---

[1]) В действительности в этом отношении должен стоять еще довольно значительный численный коэффициент. Это связано с указанным выше обстоятельством, что l и Δu могут довольно заметно отличаться от истинных масштабов и скоростей турбулентного движения. Более точно можно написать:

$$\nu_{\text{турб}}/\nu \sim \mathrm{R}/\mathrm{R}_{\text{кр}},$$

где учитывается, что $\nu_{\text{турб}}$ и ν должны в действительности сравниваться не при $\mathrm{R} \sim 1$, а при $\mathrm{R} \sim \mathrm{R}_{\text{кр}}$.

Для этого выясним предварительно, какими параметрами могут вообще определяться свойства турбулентного движения в участках, малых по сравнению с l, но больших по сравнению с расстояниями λ_0, на которых начинает играть роль вязкость жидкости; ниже будет идти речь именно о таких расстояниях. Этими параметрами является плотность ρ жидкости и, кроме того, еще одна характерная для турбулентного потока величина — энергия ε, диссипируемая в единицу времени в единице массы жидкости. Мы видели, что ε представляет собой поток энергии, непрерывно передаваемой от пульсаций с бо́льшими к пульсациям с меньшими масштабами. Поэтому, хотя диссипация энергии и обусловливается в конечном итоге вязкостью жидкости и происходит в самых мелкомасштабных пульсациях, тем не менее величина ε определяет свойства движения и в бо́льших масштабах. Что касается масштабов l и Δu размеров и скорости движения в целом, то естественно считать, что (при заданных ρ и ε) локальные свойства турбулентности от этих величин не зависят. Вязкость жидкости ν тоже не может входить ни в какие интересующие нас теперь величины (напоминаем, что речь идет о расстояниях $\lambda \gg \lambda_0$).

Определим порядок величины v_λ изменения скорости турбулентного движения на протяжении расстояний порядка λ. Оно должно определяться только величиной ε и, разумеется, самим расстоянием[1]) λ. Из этих двух величин можно составить всего одну комбинацию с размерностью скорости: $(\varepsilon\lambda)^{1/3}$. Поэтому можно утверждать, что должно быть

$$v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}. \qquad (33,6)$$

Таким образом, изменение скорости на протяжении малого расстояния пропорционально кубическому корню из этого расстояния (*закон Колмогорова — Обухова*). Величину v_λ можно рассматривать и как скорость турбулентных движений масштаба λ: изменение средней скорости на малых расстояниях мало по сравнению с изменением пульсационной скорости на этих же расстояниях, и им можно пренебречь.

К соотношению (33,6) можно придти и другим путем, выражая постоянную величину — диссипацию ε — через величины, характеризующие пульсации масштаба λ. При этом ε должно быть пропорционально квадрату градиента скорости v_λ и соответствующему коэффициенту турбулентной вязкости $\nu_{\text{турб}\lambda} \sim \lambda v_\lambda$:

$$\varepsilon \sim \nu_{\text{турб}\lambda}\left(\frac{v_\lambda}{\lambda}\right)^2 \sim \frac{v_\lambda^3}{\lambda},$$

откуда и получается (33,6).

---

[1]) Величина ε имеет размерность эрг/(г·с) $=$ см^2/с^3, не содержащую размерности массы; единственной величиной, содержащей размерность массы, является плотность ρ. Поэтому последняя вообще не участвует в составлении величин, размерность которых не содержит размерности массы.

Поставим теперь вопрос несколько иначе. Определим порядок величины v_τ изменения скорости в заданной точке пространства, испытываемого ею в течение промежутка времени τ, малого по сравнению с характеристическим временем $T \sim l/u$ движения в целом. Для этого замечаем, что благодаря наличию общего течения каждый данный участок жидкости в продолжение промежутка времени τ перемещается в пространстве на расстояние порядка произведения τu средней скорости u на время τ. Поэтому в данной точке пространства по истечении времени τ будет находиться участок жидкости, который в начальный момент был удален от этой точки на расстояние $u\tau$. Искомую величину v_τ можно, следовательно, получить, подставляя в (33,6) τu вместо λ:

$$v_\tau \sim (\varepsilon u\tau)^{1/3}. \qquad (33,7)$$

От величины v_τ следует отличать изменение v'_τ скорости данного перемещающегося в пространстве участка жидкости. Это изменение может, очевидно, зависеть только от величины ε, определяющей локальные свойства турбулентности, и, разумеется, от величины самого интервала времени τ. Составляя из ε и τ комбинацию размерности скорости, получаем для искомого изменения

$$v'_\tau \sim (\varepsilon\tau)^{1/2}. \qquad (33,8)$$

В отличие от изменения скорости в заданной точке пространства оно пропорционально квадратному, а не кубическому корню из τ. Легко видеть, что при $\tau \ll T$ изменение v'_τ всегда меньше изменения v_τ [1]).

С помощью выражения (33,1) для ε можно переписать формулы (33,6—7) в виде

$$\frac{v_\lambda}{\Delta u} \sim \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3}, \quad \frac{v_\tau}{\Delta u} \sim \left(\frac{\tau}{T}\right)^{1/3}. \qquad (33,9)$$

В такой записи ясно видно свойство подобия локальной турбулентности: мелкомасштабные характеристики различных турбулентных течений отличаются только масштабами измерения длин и скоростей (или, что то же, длин и времен)[2]).

Выясним теперь, на каких расстояниях начинает играть роль вязкость жидкости Эти расстояния λ_0 определяют собой в то же время порядок величины масштабов наиболее мелкомасштабных пульсаций в турбулентном потоке (величину λ_0 называют *внутренним масштабом* турбулентности в противоположность

[1]) Неравенство $v'_\tau \ll v_\tau$, по существу, уже подразумевалось при выводе (33,7).

[2]) В этой связи в современной литературе широко используется термин *автомодельность* движения (по английской терминологии self-similarity).

внешнему масштабу l). Для этого составляем «локальное число Рейнольдса»:

$$R_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \sim \frac{\Delta u \cdot \lambda^{4/3}}{\nu l^{1/3}} \sim R\left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3},$$

где $R \sim \Delta u \cdot l/\nu$ — число Рейнольдса движения в целом. Порядок величины λ_0 определяется тем, что должно быть $R_{\lambda_0} \sim 1$. Отсюда находим

$$\lambda_0 \sim l/R^{3/4}. \tag{33,10}$$

К этому же выражению можно прийти, составляя комбинацию размерности длины из величин ε и ν:

$$\lambda_0 \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}. \tag{33,11}$$

Таким образом, внутренний масштаб турбулентности быстро падает при увеличении числа Рейнольдса. Для соответствующей скорости имеем

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u/R^{1/4}. \tag{33,12}$$

Она тоже падает с увеличением R[1]).

Область масштабов $\lambda \sim l$ называют *областью энергии*; в ней сосредоточена основная часть кинетической энергии жидкости. Значения $\lambda \lesssim \lambda_0$ составляют *область диссипации* — в ней происходит диссипация кинетической энергии. При очень больших значениях R обе эти области достаточно раздвинуты друг от друга, и между ними расположен *инерционный интервал*, в котором

$$\lambda_0 \ll \lambda \ll l;$$

к нему относятся излагаемые в этом параграфе результаты.

Закон Колмогорова — Обухова можно представить в эквивалентной спектральной (по пространству) форме. Введем вместо масштабов λ соответствующие «волновые числа» пульсаций $k \sim 1/\lambda$, и пусть $E(k)dk$ есть кинетическая энергия (единицы массы жидкости), заключенная в пульсациях со значениями k в заданном интервале dk. Функция $E(k)$ имеет размерность см^3/с^2; составляя комбинацию этой размерности из ε и k, получим

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \tag{33,13}$$

В эквивалентности этой формулы закону (33,6) легко убедиться, заметив, что квадрат v_λ^2 определяет порядок величины суммарной энергии, заключенной в пульсациях со всеми масштабами

[1]) Формулы (33,10—12) определяют законы изменения соответствующих величин с R. Что же касается количественной стороны дела, то более правильным было бы писать в них отношение $R/R_{кр}$ вместо R.

порядка и меньше заданного значения λ. К этому же результату мы придем, интегрируя выражение (33,13):

$$\int_k^\infty E(k)\,dk \sim \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{2/3}} \sim (\varepsilon\lambda)^{2/3} \sim v_\lambda^2.$$

Наряду с пространственными масштабами турбулентных пульсаций, можно рассматривать также и их временные характеристики — частоты. Нижний конец частотного спектра турбулентного движения лежит при частотах $\sim u/l$. Верхний же его конец определяется частотами

$$\omega_0 \sim \frac{u}{\lambda_0} \sim \frac{u}{l}\mathrm{R}^{3/4}, \tag{33,14}$$

отвечающими внутреннему масштабу турбулентности. Инерционной области отвечают частоты в интервале

$$\frac{u}{l} \ll \omega \ll \frac{u}{l}\mathrm{R}^{3/4}.$$

Неравенство $\omega \gg u/l$ означает, что по отношению к локальным свойствам турбулентности основное движение можно считать стационарным. Распределение энергии по частотному спектру в инерционной области получается из (33,13) заменой $k \sim \omega/u$:

$$E(\omega) \sim (u\varepsilon)^{2/3}\omega^{-5/3}, \tag{33,15}$$

причем $E(\omega)d\omega$ есть энергия, заключенная в частотном интервале $d\omega$.

Частота ω определяет период повторяемости во времени движения в данном участке пространства, наблюдаемого из неподвижной системы отсчета. Ее надо отличать от частоты (обозначим ее ω'), определяющей период повторяемости движения в данном перемещающемся в пространстве участке жидкости. Распределение энергии по спектру этих частот не может зависеть от u, и должно определяться только параметром ε и самой частотой ω'. Снова из соображений размерности найдем, что

$$E(\omega') \sim \varepsilon/\omega'^2. \tag{33,16}$$

Эта формула находится в таком же отношении к закону (33,15), как (33,8) к (33,7).

Турбулентное перемешивание приводит к постепенному расхождению жидких частиц, находящихся первоначально вблизи друг от друга. Рассмотрим две жидкие частицы на малом (в инерциальной области) расстоянии λ. Снова руководствуясь соображениями размерности, можно заключить, что скорость изменения этого расстояния со временем

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}. \tag{33,17}$$

Интегрируя это соотношение, найдем, что время τ, в течение которого две частицы, находившиеся первоначально на расстоянии λ_1 друг от друга, разойдутся на расстояние $\lambda_2 \gg \lambda_1$, равно по порядку величины

$$\tau \sim \lambda_2^{2/3}/\varepsilon^{1/3}. \qquad (33,18)$$

Обратим внимание на самоускоряющийся характер процесса: скорость расхождения растет с увеличением λ. Это свойство связано с тем, что к расхождению частиц, находящихся на расстоянии λ, приводят только пульсации масштабов $\lesssim\lambda$; пульсации бóльших масштабов переносят обе частицы вместе и не приводят к их расхождению[1]).

Наконец, остановимся на свойствах движения в участках с размерами $\lambda \ll \lambda_0$. В таких участках движение обладает правильным характером и его скорость меняется плавно. Поэтому можно разложить здесь v_λ по степеням λ и, сохранив только первый член, получим $v_\lambda = \mathrm{const}\cdot\lambda$. Коэффициент определяется требованием, чтобы при $\lambda \sim \lambda_0$ было $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$. Таким образом находим

$$v_\lambda \sim \frac{v_{\lambda_0}}{\lambda_0}\lambda \sim \frac{\Delta u}{l}\lambda \mathrm{R}^{1/2}. \qquad (33,19)$$

Этот результат можно получить также и путем приравнивания двух выражений для диссипации энергии ε: выражения $(\Delta u)^3/l$ (33,1), определяющего ε через характеристики крупномасштабных пульсаций, и выражения $\nu(v_\lambda/\lambda)^2$, определяющего ту же величину через градиент скорости тех пульсаций, в которых фактически и происходит диссипация.

§ 34. Корреляционные функции скоростей

Уже формула (33,6) качественно определяет корреляцию скоростей в локальной турбулентности, т. е. связь между скоростями в двух близких точках потока. Введем теперь функции, которые могут служить количественной характеристикой этой корреляции[2]).

Первой из таких характеристик является корреляционный тензор второго ранга

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle, \qquad (34,1)$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости жидкости в двух близких точках, а угловые скобки означают усреднение по времени. Радиус-вектор

[1]) Эти результаты можно применить к взвешенным в жидкости частицам суспензии, пассивно переносимым вместе с движущейся жидкостью.

[2]) Корреляционные функции были введены в гидродинамику турбулентности *Л. В. Келлером* и *А. А. Фридманом* (1924).