Интегрируя это соотношение, найдем, что время τ, в течение которого две частицы, находившиеся первоначально на расстоянии λ_1 друг от друга, разойдутся на расстояние $\lambda_2 \gg \lambda_1$, равно по порядку величины

$$\tau \sim \lambda_2^{2/3}/\varepsilon^{1/3}. \tag{33,18}$$

Обратим внимание на самоускоряющийся характер процесса: скорость расхождения растет с увеличением λ. Это свойство связано с тем, что к расхождению частиц, находящихся на расстоянии λ, приводят только пульсации масштабов $\lesssim\lambda$; пульсации бóльших масштабов переносят обе частицы вместе и не приводят к их расхождению[1].

Наконец, остановимся на свойствах движения в участках с размерами $\lambda \ll \lambda_0$. В таких участках движение обладает правильным характером и его скорость меняется плавно. Поэтому можно разложить здесь v_λ по степеням λ и, сохранив только первый член, получим $v_\lambda = \text{const}\cdot\lambda$. Коэффициент определяется требованием, чтобы при $\lambda \sim \lambda_0$ было $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$. Таким образом находим

$$v_\lambda \sim \frac{v_{\lambda_0}}{\lambda_0}\lambda \sim \frac{\Delta u}{l}\lambda \mathrm{R}^{1/2}. \tag{33,19}$$

Этот результат можно получить также и путем приравнивания двух выражений для диссипации энергии ε: выражения $(\Delta u)^3/l$ (33,1), определяющего ε через характеристики крупномасштабных пульсаций, и выражения $\nu(v_\lambda/\lambda)^2$, определяющего ту же величину через градиент скорости тех пульсаций, в которых фактически и происходит диссипация.

§ 34. Корреляционные функции скоростей

Уже формула (33,6) качественно определяет корреляцию скоростей в локальной турбулентности, т. е. связь между скоростями в двух близких точках потока. Введем теперь функции, которые могут служить количественной характеристикой этой корреляции[2].

Первой из таких характеристик является корреляционный тензор второго ранга

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle, \tag{34,1}$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости жидкости в двух близких точках, а угловые скобки означают усреднение по времени. Радиус-вектор

---

[1]) Эти результаты можно применить к взвешенным в жидкости частицам суспензии, пассивно переносимым вместе с движущейся жидкостью.

[2]) Корреляционные функции были введены в гидродинамику турбулентности *Л. В. Келлером* и *А. А. Фридманом* (1924).

между точками *1* и *2* (направленный от *1* к *2*) обозначим через $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Рассматривая локальную турбулентность, мы считаем расстояние малым по сравнению с основным масштабом l, но не обязательно большим по сравнению с внутренним масштабом турбулентности λ_0.

Изменение скорости на малых расстояниях обусловлено мелкомасштабными пульсациями. С другой стороны, свойства локальной турбулентности не зависят от усредненного движения. Поэтому можно упростить изучение корреляционных функций локальной турбулентности, рассматривая вместо этого идеализированный случай турбулентного движения, в котором изотропия и однородность имеют место не только на малых (как в локальной турбулентности), но и на всех вообще масштабах; усредненная скорость при этом равна нулю. Такую полностью изотропную и однородную турбулентность[1]) можно представить себе как движение в жидкости, подвергнутой сильному «взбалтыванию» и затем оставленной в покое. Такое движение, разумеется, непременно затухает со временем, так что функциями времени становятся и компоненты корреляционного тензора[2]). Выведенные ниже соотношения между различными корреляционными функциями относятся к однородной и изотропной турбулентности на всех ее масштабах, а к локальной турбулентности — на расстояниях $r \ll l$.

В силу изотропии, тензор B_{ik} не может зависеть ни от какого избранного направления в пространстве. Единственным вектором, который может входить в выражение для B_{ik}, является радиус-вектор $\mathbf{r}$. Общий вид такого симметричного тензора второго ранга есть

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k, \tag{34,2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$.

Для выяснения смысла функций A и B выберем координатные оси так, чтобы одна из них совпала с направлением $\mathbf{n}$. Компоненту скорости вдоль этой оси обозначим как v_r, а перпендикулярную $\mathbf{n}$ составляющую скорости будем отличать индексом t. Компонента корреляционного тензора B_{rr} есть тогда среднее значение квадрата относительной скорости двух частиц жидкости в их движении навстречу друг другу. Компонента же B_{tt} есть средний квадрат скорости вращательного движения одной частицы относительно другой. Поскольку $n_r = 1$, $\mathbf{n}_t = 0$, то из (34,2) имеем

$$B_{rr} = A + B, \quad B_{tt} = A, \quad B_{tr} = 0.$$

---

[1]) Это понятие было введено *Тэйлором* (*G. I. Taylor*, 1935).

[2]) Под усреднением в определении (34,1) надо при этом, строго говоря, понимать не усреднение по времени, а усреднение по всем возможным положениям точек *1* и *2* (при заданном расстоянии между ними) в один и тот же момент времени.

Выражение (34,2) можно теперь представить в виде

$$B_{ik} = B_{tt}(r)(\delta_{ik} - n_i n_k) + B_{rr}(r) n_i n_k. \tag{34,3}$$

Раскрыв скобки в определении (34,1), пишем

$$B_{ik} = \langle v_{1i} v_{1k} \rangle + \langle v_{2i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1k} v_{2i} \rangle.$$

Ввиду однородности, средние значения произведения $v_i v_k$ в точках *1* и *2* одинаковы, а ввиду изотропии среднее значение $\langle v_{1i} v_{2k} \rangle$ не меняется при перестановке точек *1* и *2* (т. е. при изменении знака разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$); таким образом,

$$\langle v_{1i} v_{1k} \rangle = \langle v_{2i} v_{2k} \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik}, \quad \langle v_{1i} v_{2k} \rangle = \langle v_{2i} v_{1k} \rangle.$$

Поэтому

$$B_{ik} = \frac{2}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik} - 2 b_{ik}, \quad b_{ik} = \langle v_{1i} v_{2k} \rangle. \tag{34,4}$$

Вспомогательный симметричный тензор b_{ik} обращается в нуль при $r \to \infty$; действительно, скорости турбулентного движения в бесконечно удаленных точках можно считать статистически независимыми, так что среднее значение их произведения сводится к произведению средних значений каждого множителя в отдельности, равных нулю по условию.

Продифференцируем выражение (34,4) по координатам точки *2*:

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2 \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2 \left\langle v_{1i} \frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}} \right\rangle.$$

Но в силу уравнения непрерывности имеем $\partial v_{2k} / \partial x_{2k} = 0$, так что

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = 0.$$

Поскольку B_{ik} являются функциями только от разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, то дифференцирование по x_{2k} эквивалентно дифференцированию по x_k. Подставив для B_{ik} выражение (34,3), получим после простого вычисления:

$$B'_{rr} + \frac{2}{r} (B_{rr} - B_{tt}) = 0$$

($'$ означает дифференцирование по r). Таким образом, продольная и поперечная корреляционные функции связаны друг с другом соотношением

$$B_{tt} = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 B_{rr}). \tag{34,5}$$

Согласно (33,6) разность скоростей на расстоянии r в инерционной области пропорциональна $r^{1/3}$. Поэтому корреляционные функции B_{rr} и B_{tt} в этой области пропорциональны $r^{2/3}$. При этом из (34,5) получается следующее простое соотношение:

$$B_{tt} = \frac{4}{3} B_{rr} \qquad (\lambda_0 \ll r \ll l). \tag{34,6}$$

Для расстояний же $r \ll \lambda_0$ разность скоростей пропорциональна r и, следовательно, B_{rr} и B_{tt} пропорциональны r^2. Формула (34,5) приводит теперь к соотношению

$$B_{tt} = 2B_{rr} \qquad (r \ll \lambda_0). \tag{34,7}$$

Для этих расстояний B_{tt} и B_{rr} могут еще быть выражены через среднюю диссипацию энергии ε. Пишем $B_{rr} = ar^2$ (где a — постоянная) и, комбинируя (34,3—4) и (34,7) находим:

$$b_{ik} = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle \delta_{ik} - ar^2\delta_{ik} + \frac{a}{2} x_i x_k.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем:

$$\left\langle \frac{\partial v_{1l}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}} \right\rangle = 15a, \qquad \left\langle \frac{\partial v_{1l}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}} \right\rangle = 0.$$

Поскольку эти равенства справедливы при сколь угодно малых r, можно положить в них $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, после чего они дают:

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l} \right)^2 \right\rangle = 15a, \qquad \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right\rangle = 0.$$

С другой стороны, согласно (16,3) имеем для средней диссипации энергии

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \nu \left\{ \left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right\rangle \right\} = 15a\nu,$$

откуда $a = \varepsilon / 15\nu$ [1]). В результате находим окончательно следующие формулы, определяющие корреляционные функции через диссипацию энергии:

$$B_{tt} = \frac{2\varepsilon}{15\nu} r^2, \qquad B_{rr} = \frac{\varepsilon}{15\nu} r^2 \tag{34,8}$$

(*А. Н. Колмогоров*, 1941).

Далее, введем корреляционный тензор третьего ранга

$$B_{ikl} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l}) \rangle \tag{34,9}$$

и вспомогательный тензор

$$b_{ik,l} = \langle v_{1i} v_{1k} v_{2l} \rangle = -\langle v_{2i} v_{2k} v_{1l} \rangle. \tag{34,10}$$

---

[1]) Отметим, что для изотропной турбулентности средняя диссипация связана со средним квадратом завихренности простым соотношением:

$$\langle (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right)^2 \right\rangle = \frac{\varepsilon}{\nu}.$$

Последний симметричен по первой паре индексов (второе равенство в определении (34,10) связано с тем, что перестановка точек *1* и *2* эквивалентна изменению знака $\mathbf{r}$, т. е. инверсии координат и потому меняет знак тензора третьего ранга). При $r=0$, т. е. при совпадении точек *1* и *2*, тензор $b_{ik,l}(0)=0$ — среднее значение от произведения нечетного числа компонент пульсирующей скорости обращается в нуль. Раскрыв скобки в определении (34,9), выразим тензор B_{ikl} через $b_{ik,l}$:

$$B_{ikl}=2(b_{ik,l}+b_{il,k}+b_{lk,i}). \qquad (34,11)$$

При $r\to\infty$ тензор $b_{ik,l}$, а с ним и B_{ikl}, стремятся к нулю.

В силу изотропии, тензор $b_{ik,l}$ должен выражаться через единичный тензор δ_{ik} и компоненты единичного вектора $\mathbf{n}$. Общий вид такого тензора, симметричного по первой паре индексов, есть

$$b_{ik,l}=C(r)\,\delta_{ik}n_l+D(r)(\delta_{il}n_k+\delta_{kl}n_i)+F(r)\,n_in_kn_l. \qquad (34,12)$$

Дифференцируя его по координатам точки *2*, получим в силу уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_{2l}}b_{ik,l}=\left\langle v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}}\right\rangle=0.$$

Подстановка же сюда выражения (34,12) приводит, после простого вычисления, к двум уравнениям

$$[r^2(3C+2D+F)]'=0, \qquad C'+\frac{2}{r}(C+D)=0.$$

Интегрирование первого дает

$$3C+2D+F=\frac{\mathrm{const}}{r^2}.$$

Но при $r=0$ функции C, D, F должны обращаться в нуль, поэтому надо положить $\mathrm{const}=0$, так что $3C+2D+F=0$. Из обоих полученных таким образом уравнений находим:

$$D=-C-\frac{1}{2}rC', \qquad F=rC'-C. \qquad (34,13)$$

Подстановка (34,13) в (34,12) и затем в (34,11) приводит к выражению

$$B_{ikl}=-2(rC'+C)(\delta_{ik}n_l+\delta_{il}n_k+\delta_{kl}n_i)+6(rC'-C)\,n_in_kn_l.$$

Направив снова одну из координатных осей по направлению вектора $\mathbf{n}$, получим для компонент тензора B_{ikl}:

$$B_{rrr}=-12C, \qquad B_{rtt}=-2(C+rC'), \qquad B_{rrt}=B_{ttt}=0. \qquad (34,14)$$

Отсюда видно, что между отличными от нуля корреляционными функциями B_{rtt} и B_{rrr} имеется соотношение

$$B_{rtt} = \frac{1}{6}\frac{d}{dr}(rB_{rrr}). \tag{34,15}$$

Ниже нам понадобится также и выражение тензора $b_{ik,l}$ через компоненты тензора B_{ikl}. С помощью (34,12—14) находим

$$b_{ik,l} = -\frac{1}{12}B_{rrr}\delta_{ik}n_l + \frac{1}{24}\left(rB'_{rrr} + 2B_{rrr}\right)\left(\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i\right) - \\ - \frac{1}{12}\left(rB'_{rrr} - B_{rrr}\right)n_i n_k n_l. \tag{34,16}$$

Соотношения (34,5) и (34,15) — следствия одного лишь уравнения непрерывности. Привлечение же динамического уравнения движения — уравнения Навье — Стокса — позволяет установить уравнение, связывающее друг с другом корреляционные тензоры B_{ik} и B_{ikl} (*Th. Kármán*, *L. Howarth*, 1938; *А. Н. Колмогоров*, 1941).

Для этого вычисляем производную $\partial b_{ik}/\partial t$ (напомним, что полностью однородное и изотропное турбулентное движение непременно затухает со временем). Выразив производные $\partial v_{1i}/\partial t$ и $\partial v_{2k}/\partial t$ с помощью уравнения Навье — Стокса, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_{1i}v_{2k}\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_{1l}}\langle v_{1i}v_{1l}v_{2k}\rangle - \frac{\partial}{\partial x_{2l}}\langle v_{1i}v_{2k}v_{2l}\rangle - \\ - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\langle p_1 v_{2k}\rangle - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\langle p_2 v_{1i}\rangle + \nu\Delta_1\langle v_{1i}v_{2k}\rangle + \nu\Delta_2\langle v_{1i}v_{2k}\rangle. \tag{34,17}$$

Корреляционная функция давления и скорости равна нулю:

$$\langle p_1\mathbf{v}_2\rangle = 0. \tag{34,18}$$

Действительно, в силу изотропии эта функция должна была бы иметь вид $f(r)\mathbf{n}$. С другой стороны, в силу уравнения непрерывности

$$\operatorname{div}_2\langle p_1\mathbf{v}_2\rangle = \langle p_1 \operatorname{div}_2\mathbf{v}_2\rangle = 0.$$

Но единственным вектором вида $f(r)\mathbf{n}$ и с равной нулю дивергенцией является вектор $\mathrm{const}\,\mathbf{n}/r^2$; такой вектор не удовлетворяет условию конечности при $r=0$ и потому должно быть $\mathrm{const}=0$.

Заменив теперь в (34,17) производные по x_{1i} и x_{2i} производными по $-x_i$ и x_i, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}b_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}(b_{il,k} + b_{kl,i}) + 2\nu\,\Delta b_{ik}. \tag{34,19}$$

Сюда надо подставить b_{ik} и $b_{ik,l}$ из (34,4) и (34,16). Производная по времени от кинетической энергии единицы массы жидкости, $\langle v_2\rangle/2$, есть не что иное, как диссипация энергии $-\varepsilon$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\langle v^2\rangle}{3}=-\frac{2}{3}\varepsilon.$$

Простое, но довольно длинное вычисление приводит к следующему уравнению[1]):

$$-\frac{2}{3}\varepsilon-\frac{1}{2}\frac{\partial B_{rr}}{\partial t}=\frac{1}{6r^4}\frac{\partial}{\partial r}(r^4B_{rrr})-\frac{\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial B_{rr}}{\partial r}\right). \quad (34,20)$$

Величина B_{rr} как функция времени существенно меняется лишь за время, отвечающее основному масштабу турбулентности ($\sim l/u$). По отношению к локальной турбулентности основное движение может рассматриваться как стационарное (как это было уже отмечено в § 33). Это значит, что в применении к локальной турбулентности в левой стороне уравнения (34,20) можно с достаточной точностью пренебречь производной $\partial B_{rr}/\partial t$ по сравнению с ε. Умножив остающееся уравнение на r^4 и проинтегрировав его по r (с учетом обращения корреляционных функций в нуль при $r=0$), получим следующее соотношение между B_{rr} и B_{rrr}:

$$B_{rrr}=-\frac{4}{5}\varepsilon r+6\nu\frac{dB_{rr}}{dr} \quad (34,21)$$

(*А. Н. Колмогоров*, 1941). Это соотношение справедливо при r как бо́льших, так и меньших чем λ_0. При $r\gg\lambda_0$ член, содержащий вязкость, мал и мы имеем просто

$$B_{rrr}=-\frac{4}{5}\varepsilon r. \quad (34,22)$$

Если же подставить в (34,21) при $r\ll\lambda_0$ выражение (34,8) для B_{rr}, то получится нуль; это связано с тем, что в этом случае должно быть $B_{rrr}\propto r^3$, так что члены первого порядка должны сократиться.

Одно уравнение (34,20) связывает две независимые функции B_{rr} и B_{rrr} и потому, само по себе, не дает возможности найти эти функции. Появление в нем корреляционных функций сразу двух порядков связано с нелинейностью уравнения Навье — Стокса. По этой же причине вычисление производной по времени от корреляционного тензора третьего ранга привело бы к уравнению, содержащему также и корреляционную функцию четвертого порядка, и т. д. Таким образом, возникает бесконечная цепочка уравнений. Получить таким способом замкнутую

---

[1]) В результате вычисления это уравнение получается умноженным с обоих сторон на оператор $(1+{}^1\!/_2 r\partial/\partial r)$. Но поскольку единственное решение уравнения $f+{}^1\!/_2 r\partial f/\partial r=0$, конечное при $r=0$, есть $f=0$, то этот оператор можно опустить.

систему конечного числа уравнений без каких-либо дополнительных предположений невозможно.

Сделаем еще следующее общее замечание[1]). Можно было бы думать, что существует принципиальная возможность получить универсальную (применимую к любому турбулентному движению) формулу, определяющую величины B_{rr}, B_{tt} для всех расстояний r, малых по сравнению с l. В действительности, однако, такой формулы вообще не может существовать, как это явствует из следующих соображений. Мгновенное значение величины $(v_{2i}-v_{1i})(v_{2k}-v_{1k})$ можно было бы, в принципе, выразить универсальным образом через диссипацию энергии ε в тот же момент времени. Однако, при усреднении этих выражений будет существенным закон изменения ε в течение периодов крупномасштабных (масштабы $\sim l$) движений, различный для различных конкретных случаев движения. Поэтому и результат усреднения не может быть универсальным [2]).

Интеграл Лойцянского

Перепишем уравнение (34,20), введя в него вместо функций B_{rr}, B_{rrr} функции b_{rr}, $b_{rr,r}$:

$$\frac{\partial b_{rr}}{\partial t}=\frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[2\nu r^4\frac{\partial b_{rr}}{\partial r}+r^4 b_{rr,r}\right]. \qquad (34,23)$$

Умножив это уравнение на r^4, проинтегрируем его по r от 0 до ∞. Выражение в квадратных скобках равно нулю при $r=0$. Полагая, что оно обращается в нуль также и при $r\to\infty$, найдем, что

$$\Lambda\equiv\int_0^\infty r^4 b_{rr}\,dr=\text{const} \qquad (34,24)$$

(*Л. Г. Лойцянский*, 1939). Этот интеграл сходится, если функция b_{rr} убывает на бесконечности быстрее, чем r^{-5}, а чтобы он действительно сохранялся, функция $b_{rr,r}$ должна убывать быстрее, чем r^{-4}.

Функции b_{rr} и b_{tt} связаны друг с другом таким же соотношением (34,5), как и B_{rr} и B_{tt}. Поэтому имеем (при тех же

[1]) Оно было высказано *Л. Д. Ландау* (1944).

[2]) Вопрос о том, должны ли флуктуации ε отразиться даже на виде корреляционных функций в инерционной области, вряд ли может быть надежно решен до построения последовательной теории турбулентности [этот вопрос был поставлен *Колмогоровым А. Н.* — J. Fluid Mech., 1962, v. 13, p. 77) и *Обуховым А. М.* (там же, p. 82)]. Существующие попытки ввести связанные с этим фактором поправки в закон Колмогорова — Обухова основаны на гипотезах о статистических свойствах диссипации, степень правдоподобности которых трудно оценить.

условиях)

$$\int_0^\infty b_{tt} r^4\, dr = -\frac{3}{2} \int_0^\infty b_{rr} r^4\, dr.$$

Поскольку $b_{rr} + 2b_{tt} = \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \rangle$, то интеграл (34,24) можно представить в виде

$$\Lambda = -\frac{1}{4\pi} \int r^2 \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \rangle\, dV \tag{34,25}$$

(где $dV = d^3(x_1 - x_2)$). Этот интеграл тесно связан с моментом импульса жидкости, находящейся в состоянии однородной и изотропной турбулентности. Можно показать (на чем мы останавливаться не будем), что квадрат полного момента импульса $\mathbf{M}$ жидкости, заключенной в некотором большом объеме V (выделенном в неограниченной жидкости) есть $M^2 = 4\pi\rho^2 \Lambda V$; тот факт, что $\mathbf{M}$ растет пропорционально $V^{1/2}$, а не V, связан с тем, что $\mathbf{M}$ является суммой большого числа статистически независимых слагаемых (моментов импульса отдельных небольших участков жидкости) с равными нулю средними значениями.

Значение M^2 в заданном объеме V может меняться за счет взаимодействия с окружающими областями жидкости. Если бы это взаимодействие достаточно быстро убывало с расстоянием, то оно представляло бы собой для рассматриваемой части жидкости поверхностный эффект. Тогда времена, в течение которых M^2 могло бы претерпеть значительное изменение, росли бы вместе с размерами объема V; эти времена и размеры должны рассматриваться как сколь угодно большие, и в этом смысле M^2 сохранялось бы.

Указанное условие тесно связано с условиями достаточно быстрого убывания корреляционных функций, сформулированными при выводе (34,24) из (34,23). Но в рамках теории несжимаемой жидкости существуют основания сомневаться в их соблюдении. Физическое основание для этого состоит в бесконечной скорости распространения возмущений в несжимаемой жидкости. Математически это свойство проявляется в интегральном характере зависимости распределения давления в жидкости от распределения скоростей: если рассматривать правую часть уравнения (15,11) как заданную, то решение этого уравнения:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{\partial^2 v_i(\mathbf{r}') v_k(\mathbf{r}')}{\partial x_i' \partial x_k'} \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

В результате любое локальное возмущение скорости мгновенно отражается на давлении во всем пространстве; давление же влияет на ускорение жидкости и тем самым — на дальнейшее изменение скоростей.

Естественная постановка задачи для выяснения этого вопроса состоит в следующем: пусть в начальный момент времени ($t=0$) создано изотропное турбулентное движение, в котором функции $b_{ik}(r,t)$ и $b_{ik,l}(r,t)$ экспоненциально убывают с расстоянием. Выразив давление через скорости по написанной формуле, можно затем с помощью уравнений движения жидкости пытаться определить характер зависимости производных по времени от корреляционных функций (в момент $t=0$) от расстояния при $r\to\infty$. Тем самым определится и характер зависимости от r самих корреляционных функций при $t>0$. Такое исследование приводит к следующим результатам[1]).

Функция $b_{rr}(r,t)$ при $t>0$ убывает на бесконечности не медленнее, чем r^{-6} (а возможно, что и экспоненциально). Поэтому интеграл Лойцянского сходится. Функция же $b_{rr,r}$ убывает лишь как r^{-4}. Это значит, что Λ не сохраняется. Его производная по времени оказывается некоторой отличной от нуля отрицательной (как результат эмпирического факта отрицательности $b_{rr,r}$) функцией времени. Эта функция целиком связана с инерционными силами. Естественно думать, что по мере затухания турбулентности роль этих сил падает, и в заключительной стадии ими можно пренебречь по сравнению с вязкими силами. Таким образом, Λ убывает (момент импульса равномерно «растекается» по бесконечному пространству), стремясь к постоянному значению, принимаемому им на заключительной стадии турбулентности.

Отсюда возникает возможность определить для этой стадии закон изменения со временем основного масштаба турбулентности l и ее характерной скорости v. Оценка интеграла (34,25) дает $\Lambda\sim v^2l^5=\mathrm{const}$. Еще одно соотношение получим из оценки скорости убывания энергии путем вязкой диссипации. Диссипация ε пропорциональна квадрату градиентов скорости; оценив последние как v/l, имеем $\varepsilon\sim\nu(v/l)^2$. Приравняв ее производной $\partial(v^2)/\partial t\sim v^2/t$ (t отсчитывается от начала заключительной стадии затухания), получим $l\sim(\nu t)^{1/2}$ и затем

$$v=\mathrm{const}\cdot t^{-5/4} \tag{34,26}$$

(*М. Д. Миллионщиков*, 1939).

Спектральное представление корреляционных функций

Наряду с рассмотренным в предыдущем параграфе координатным представлением корреляционных функций, методически и физически интересно также и спектральное (по волновым век-

[1]) См. *Proudman I., Reid W. H.* — Phil. Trans. Roy. Soc., 1954, v. A247, p. 163; *Batchelor G. K., Proudman I.*, там же, 1956, v. A248, p. 369. Изложение этих работ дано также в книге: *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1967, т. 2, § 15.5—6.

торам) их представление. Оно получается разложением в пространственный интеграл Фурье:

$$B_{ik}(\mathbf{r}) = \int B_{ik}(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad B_{ik}(\mathbf{k}) = \int B_{ik}(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x$$

(мы обозначаем спектральную корреляционную функцию $B_{ik}(\mathbf{k})$ тем же символом B_{ik} с другой независимой переменной — волновым вектором $\mathbf{k}$). Поскольку в изотропной турбулентности $B_{ik}(-\mathbf{r}) = B_{ik}(\mathbf{r})$, то $B_{ik}(\mathbf{k}) = B_{ik}(-\mathbf{k}) = B^*_{ik}(\mathbf{k})$, т. е. спектральные функции $B_{ik}(\mathbf{k})$ вещественны.

При $r \to \infty$ функции $B_{ik}(\mathbf{r})$ стремятся к конечному пределу, даваемому первым членом в (34,4). Соответственно этому, их фурье-компоненты содержат δ-функционный член:

$$B_{ik}(\mathbf{k}) = \frac{2}{3}(2\pi)^3\, \delta(\mathbf{k})\, \langle v^2 \rangle - 2b_{ik}(\mathbf{k}). \qquad (34,27)$$

Компоненты же с $\mathbf{k} \neq 0$ для функций B_{ik} и $-2b_{ik}$ совпадают друг с другом.

Дифференцирование по координатам x_l в координатном представлении эквивалентно в спектральном представлении умножению на ik_l. Поэтому уравнение непрерывности $\partial b_{ik}(\mathbf{r})/\partial x_i = 0$ сводится в спектральном представлении к условию поперечности тензора $b_{ik}(\mathbf{k})$ по отношению к волновому вектору:

$$k_i b_{ik}(\mathbf{k}) = 0. \qquad (34,28)$$

В силу изотропии, тензор $b_{ik}(\mathbf{k})$ должен выражаться только через вектор $\mathbf{k}$ и единичный тензор δ_{ik}. Общий вид такого симметричного тензора, удовлетворяющего условию (34,28), есть

$$b_{ik}(\mathbf{k}) = F^{(2)}(k)\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right), \qquad (34,29)$$

где $F^{(2)}(k)$ — вещественная функция от абсолютной величины волнового вектора.

Аналогичным образом определяется спектральное представление корреляционного тензора третьего ранга, причем тензор $B_{ikl}(\mathbf{k})$ выражается через $b_{ik,l}(\mathbf{k})$ формулой (34,11); δ-функционного члена эти тензоры не содержат. Уравнение непрерывности $\partial b_{ik,l}(\mathbf{r})/\partial x_l = 0$ приводит к условию поперечности спектрального тензора $b_{ik,l}(\mathbf{k})$ по его третьему индексу:

$$k_l b_{ik,l}(\mathbf{k}) = 0. \qquad (34,30)$$

Общий вид такого тензора:

$$b_{ik,l}(\mathbf{k}) = iF^{(3)}(k)\left\{\delta_{il}\frac{k_k}{k} + \delta_{kl}\frac{k_i}{k} - 2\frac{k_i k_k k_l}{k^3}\right\}. \qquad (34,31)$$

Поскольку $b_{ik,l}(-\mathbf{r}) = -b_{ik,l}(\mathbf{r})$, спектральные функции $b_{ik,l}(\mathbf{k})$ мнимы; в (34,31) введен множитель i, так что функция $F^{(3)}(k)$ — вещественная.

Уравнение (34,19) в спектральном представлении записывается как

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{ik}(\mathbf{k}) = ik_l \,[b_{il,\,k}(\mathbf{k}) + b_{kl,\,i}(\mathbf{k})] - 2\nu k^2 b_{ik}(\mathbf{k}).$$

Подставив сюда (34,29) и (34,31), получим

$$\frac{\partial F^{(2)}(k, t)}{\partial t} = -2kF^{(3)}(k, t) - 2\nu k^2 F^{(2)}(k, t). \qquad (34,32)$$

Функция $F^{(2)}(\mathbf{k})$ имеет важный физический смысл. Для его выяснения подойдем к определению спектральной корреляционной функции в несколько более ранней стадии[1]).

Введем спектральное разложение самой пульсирующей скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ по обычным формулам разложения Фурье:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{v}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \int \mathbf{v}(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d^3x.$$

Последний интеграл фактически расходится, поскольку $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ не стремится к нулю на бесконечности. Это обстоятельство, однако, несущественно для дальнейших формальных выводов, имеющих целью вычисление заведомо конечных средних квадратов.

Корреляционный тензор $b_{ik}(\mathbf{r})$ выражается через фурье-компоненты скорости интегралом

$$b_{il}(\mathbf{r}) = \iint \langle v_{i\mathbf{k}} v_{l\mathbf{k}'} \rangle\, e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}_2 + \mathbf{k}'\mathbf{r}_1)} \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^6}. \qquad (34,33)$$

Для того чтобы этот интеграл был функцией только от разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, подынтегральное выражение в нем должно содержать δ-функцию от суммы $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$, т. е. должно быть

$$\langle v_{i\mathbf{k}} v_{l\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 (v_i v_l)_{\mathbf{k}}\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \qquad (34,34)$$

Это выражение надо рассматривать как определение величины, обозначенной здесь символически как $(v_i v_l)_{\mathbf{k}}$. Подставив (34,34) в (34,33) и устранив δ-функцию интегрированием по d^3k', находим, что

$$b_{il}(\mathbf{r}) = \int (v_i v_l)_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

т. е. величины $(v_i v_l)_{\mathbf{k}}$ совпадают с фурье-компонентами корреляционной функции $b_{il}(\mathbf{r})$; тем самым они симметричны по индексам i, l и вещественны. В частности, $b_{ii}(\mathbf{k}) = (\mathbf{v}^2)_{\mathbf{k}}$, причем мы можем теперь утверждать, что эта величина положительна,

[1]) Приведенные ниже рассуждения перефразируют вывод, данный в V, § 122.

как это очевидно из ее связи согласно (34,34) с положительной величиной $\langle \mathbf{v}_\mathbf{k}\mathbf{v}_{\mathbf{k}'}\rangle = \langle |\mathbf{v}_\mathbf{k}|^2\rangle$ — средним квадратом модуля фурье-компоненты пульсирующей скорости.

Значение корреляционной функции $b_{ii}(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r}=0$ определяет средний квадрат скорости жидкости в какой-либо (любой) точке пространства. Оно выражается через спектральную функцию формулой

$$\langle \mathbf{v}^2\rangle = b_{ii}(\mathbf{r}=0) = \int b_{ii}(\mathbf{k})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

или, подставив сюда $b_{ii}(\mathbf{k})$ из (34,29)

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{v}^2\rangle = \int F^{(2)}(k)\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty F^{(2)}(k)\frac{4\pi k^2\,dk}{(2\pi)^3}. \qquad (34,35)$$

После всего сказанного выше смысл этой формулы очевиден: положительная величина $F^{(2)}(k)/(2\pi)^3$ представляет собой спектральную плотность кинетической энергии жидкости (отнесенной к единице массы) в $\mathbf{k}$-пространстве. Энергия же, заключенная в пульсациях с величиной волнового вектора в интервале dk, есть $E(k)\,dk$, где

$$E(k) = \frac{k^2}{2\pi^2}F^{(2)}(k). \qquad (34,36)$$

Первый член в правой стороне уравнения (34,32) возникает как фурье-компонента первого члена в правой стороне уравнения (34,19). При $r\to 0$ последний сводится к производной

$$\left\langle v_{1k}\frac{\partial}{\partial x_{1l}}v_{1i}v_{1l}\right\rangle + \left\langle v_{1i}\frac{\partial}{\partial x_{1l}}v_{1k}v_{1l}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_{1l}}\langle v_{1i}v_{1k}v_{1l}\rangle$$

и обращается в нуль в силу однородности. В спектральном представлении это значит, что

$$\int kF^{(3)}(k)\,d^3k = 0, \qquad (34,37)$$

так что функция $F^{(3)}(k)$ знакопеременна.

Уравнение (34,32) имеет простой смысл: оно представляет баланс энергии различных спектральных компонент турбулентного движения. Второй член в правой стороне отрицателен; он определяет убыль энергии, связанную с диссипацией. Первый же член (связанный с нелинейным членом в уравнении Навье — Стокса) описывает перераспределение энергии по спектру — ее переход от спектральных компонент с меньшими к компонентам с бо́льшими значениями k. Спектральная (по k) плотность энергии $E(k)$ имеет максимум при $k\sim 1/l$; в области вблизи максимума (область энергии — см. § 33) сосредоточена большая часть полной энергии турбулентного движения. Плотность же дексипируемой энергии $2\nu k^2 E(k)$ максимальна при $k \sim 1/\lambda_0$; в области диссипации сосредоточена бо́льшая часть полной диссипации. При очень больших числах Рейнольдса обе эти области раздвинуты далеко друг от друга и между ними находится инерционная область.

Проинтегрировав уравнение (34,32) по $d^3k/(2\pi)^3$, мы получим в его левой части производную по времени от полной кинетической энергии жидкости; эта производная совпадает с полной диссипацией энергии $-\varepsilon$. Таким образом, находим следующее «условие нормировки» функции $E(k)$:

$$2\nu \int_0^\infty k^2 E(k, t)\, dk = \varepsilon. \tag{34,38}$$

В инерционном интервале волновых чисел $(1/l \ll k \ll 1/\lambda_0)$ спектральные функции (как и корреляционные функции в координатном представлении) можно считать независящими от времени. Согласно (33,13) в этой области

$$E(k) = C_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{34,39}$$

где C_1 — постоянный коэффициент. Этот коэффициент связан с коэффициентом C в корреляционной функции

$$B_{rr}(r) = C(\varepsilon r)^{2/3} \tag{34,40}$$

равенством $C_1 = 0{,}76C$ (см. задачу). Их эмпирические значения: $C \approx 2$, $C_1 \approx 1{,}5$ [1]). При этом отношение

$$|B_{rrr}|/B_{rr}^{3/2} = 4/5C^{3/2} \approx 0{,}3.$$

Задача

Связать друг с другом коэффициенты C и C_1 в формулах (34,39—40) для корреляционной функции и спектральной плотности энергии в инерционной области.

Решение. Функции

$$B_{ii}(r) = 2B_{tt}(r) + B_{rr}(r) = \frac{11}{3} B_{rr}(r)$$

(использована связь (34,6)) и

$$B_{ii}(k) = -2b_{ii}(k) = -4F^{(2)}(k) = -\frac{8\pi^2}{k^2} E(k)$$

$(k \neq 0)$ связаны интегралом Фурье

$$B_{ii}(k) = \int B_{ii}(r)\, e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x.$$

Если волновой вектор лежит в инерционной области $(1/l \ll k \ll 1/\lambda_0)$, то наличие осциллирующего множителя обрезает интеграл сверху на расстояниях

---

[1]) Большинство экспериментов относится к атмосферной и океанической турбулентности. Числа Рейнольдса в этих измерениях доходили до $3\cdot 10^8$.

$r \sim 1/k \ll l$. На малых же расстояниях интеграл сходится, поскольку $B_{ii}(r) \to 0$ при $r \to 0$. Поэтому фактически интеграл определяется областью расстояний, лежащих в инерционной области ($\lambda_0 \ll r \ll l$), так что можно подставить в него $B_{rr}(r)$ из (34,40), распространив в то же время интегрирование по всему пространству. В интеграле

$$I = \int r^{3/2} e^{-i\mathbf{kr}} d^3x$$

производим сначала интегрирование по направлениям $\mathbf{r}$ и находим

$$I = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \int_0^\infty r^{5/3} e^{ikr} dr = \frac{4\pi}{k^{11/3}} \int_0^\infty \xi^{5/3} e^{i\xi} d\xi.$$

Оставшийся интеграл берется путем поворота пути интегрирования в плоскости комплексного переменного ξ с правой вещественной на верхнюю мнимую полуось. В результате получим

$$I = -\frac{4\pi}{k^{11/3}} \frac{10\pi}{9\Gamma(1/3)}.$$

Собрав полученные выражения, находим окончательно

$$C_1 = \frac{55}{27\Gamma(1/3)} C = 0{,}76C.$$

§ 35. Турбулентная область и явление отрыва

Турбулентное движение является, вообще говоря, вихревым. Однако распределение завихренности вдоль объема жидкости обнаруживает при турбулентном движении (при очень больших R) существенные особенности. Именно, при «стационарном» турбулентном обтекании тел весь объем жидкости можно обычно разделить на две области, отграниченные одна от другой. В одной из них движение является вихревым, а в другой завихренность отсутствует, и движение потенциально. Завихренность оказывается, таким образом, распределенной не по всему объему жидкости, а лишь по его части (вообще говоря, тоже бесконечной).

Возможность существования такой отграниченной области вихревого движения является следствием того, что турбулентное движение может рассматриваться как движение идеальной жидкости, описывающееся уравнениями Эйлера[1]). Мы видели (§ 8), что для движения идеальной жидкости имеет место закон сохранения циркуляции скорости. В частности, если в какой-нибудь точке линии тока ротор скорости равен нулю, то это имеет место и вдоль всей этой линии. Напротив, если в какой-нибудь точке линии тока $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$, то он отличен от нуля вдоль всей линии

[1]) Границей применимости этих уравнений к турбулентному движению являются расстояния порядка λ_0. Поэтому и о резкой границе между областями вихревого и безвихревого движений можно говорить только с точностью до таких расстояний.