$r \sim 1/k \ll l$. На малых же расстояниях интеграл сходится, поскольку $B_{ii}(r) \to 0$ при $r \to 0$. Поэтому фактически интеграл определяется областью расстояний, лежащих в инерционной области ($\lambda_0 \ll r \ll l$), так что можно подставить в него $B_{rr}(r)$ из (34,40), распространив в то же время интегрирование по всему пространству. В интеграле

$$I = \int r^{3/2} e^{-i\mathbf{kr}} d^3x$$

производим сначала интегрирование по направлениям $\mathbf{r}$ и находим

$$I = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \int_0^\infty r^{5/3} e^{ikr} dr = \frac{4\pi}{k^{11/3}} \int_0^\infty \xi^{5/3} e^{i\xi} d\xi.$$

Оставшийся интеграл берется путем поворота пути интегрирования в плоскости комплексного переменного ξ с правой вещественной на верхнюю мнимую полуось. В результате получим

$$I = -\frac{4\pi}{k^{11/3}} \frac{10\pi}{9\Gamma(1/3)}.$$

Собрав полученные выражения, находим окончательно

$$C_1 = \frac{55}{27\Gamma(1/3)} C = 0{,}76C.$$

§ 35. Турбулентная область и явление отрыва

Турбулентное движение является, вообще говоря, вихревым. Однако распределение завихренности вдоль объема жидкости обнаруживает при турбулентном движении (при очень больших R) существенные особенности. Именно, при «стационарном» турбулентном обтекании тел весь объем жидкости можно обычно разделить на две области, отграниченные одна от другой. В одной из них движение является вихревым, а в другой завихренность отсутствует, и движение потенциально. Завихренность оказывается, таким образом, распределенной не по всему объему жидкости, а лишь по его части (вообще говоря, тоже бесконечной).

Возможность существования такой отграниченной области вихревого движения является следствием того, что турбулентное движение может рассматриваться как движение идеальной жидкости, описывающееся уравнениями Эйлера[1]). Мы видели (§ 8), что для движения идеальной жидкости имеет место закон сохранения циркуляции скорости. В частности, если в какой-нибудь точке линии тока ротор скорости равен нулю, то это имеет место и вдоль всей этой линии. Напротив, если в какой-нибудь точке линии тока $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$, то он отличен от нуля вдоль всей линии

[1]) Границей применимости этих уравнений к турбулентному движению являются расстояния порядка λ_0. Поэтому и о резкой границе между областями вихревого и безвихревого движений можно говорить только с точностью до таких расстояний.

тока. Отсюда ясно, что наличие отграниченных областей вихревого и безвихревого движения совместимо с уравнениями движения, если область вихревого движения представляет собой область, за границы которой не выходят находящиеся внутри нее линии тока. Такое распределение завихренности будет устойчивым, и завихренность не будет проникать за поверхность раздела.

Одним из свойств области вихревого турбулентного движения является то, что обмен жидкостью между нею и окружающим пространством может быть только односторонним. Жидкость может втекать в нее из области потенциального движения, но никогда не вытекает из нее.

Подчеркнем, что приведенные здесь соображения не могут, конечно, рассматриваться как сколько-нибудь точное доказательство высказанных утверждений. Однако наличие отграниченных областей вихревого турбулентного движения, по-видимому, подтверждается опытом.

Как в вихревой, так и в безвихревой областях движение турбулентно. Однако характер этой турбулентности совершенно различен в обеих областях. Для выяснения происхождения этого различия обратим внимание на следующее общее свойство потенциального движения, описывающегося уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Предположим, что движение периодично в плоскости x, y, так что φ зависит от x и y посредством множителя вида $\exp\{i(k_1x + k_2y)\}$; тогда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -(k_1^2 + k_2^2)\,\varphi = -k^2\varphi,$$

и поскольку сумма вторых производных должна быть равна нулю, ясно, что вторая производная по координате z равна φ, умноженному на положительный коэффициент: $\partial^2\varphi/\partial z^2 = k^2\varphi$. Но тогда зависимость φ от z будет определяться затухающим множителем вида e^{-kz} при $z > 0$ (неограниченное возрастание, как e^{kz}, очевидно, невозможно). Таким образом, если потенциальное движение периодично в некоторой плоскости, то оно должно быть затухающим вдоль перпендикулярного к этой плоскости направления. При этом чем больше k_1 и k_2, т. е. чем меньше период повторяемости движения в плоскости x, y, тем быстрее затухает движение вдоль оси z. Эти рассуждения остаются качественно применимыми и в тех случаях, когда движение не является строго периодическим, а лишь обнаруживает некоторую качественную повторяемость.

Отсюда вытекает следующий результат. Вне области вихревого движения турбулентные пульсации должны затухать, причем тем быстрее, чем меньше их масштаб. Другими словами, мелкомасштабные пульсации не проникают глубоко в область потенциального движения. В результате заметную роль в этой области играют лишь самые крупномасштабные пульсации, затухающие на расстояниях порядка величины размеров (поперечных) вихревой области, как раз играющих в данном случае роль основного масштаба турбулентности. На расстояниях, бо́льших этих размеров, турбулентность практически отсутствует и движение можно считать ламинарным.

Мы видели, что диссипация энергии при турбулентном движении связана с наиболее мелкомасштабными пульсациями; крупномасштабные движения заметной диссипацией не сопровождаются, с чем и связана возможность применения к ним уравнения Эйлера. Ввиду сказанного выше мы приходим к существенному результату, что диссипация энергии происходит в основном лишь в области вихревого турбулентного движения и практически не имеет места вне этой области.

Имея в виду все эти особенности вихревого и безвихревого турбулентного движений, мы будем в дальнейшем для краткости называть область вихревого турбулентного движения просто *областью турбулентного движения* или *турбулентной областью*. В следующих параграфах будет рассмотрена форма этой области для различных случаев.

Турбулентная область должна быть ограничена с какой-нибудь стороны частью поверхности обтекаемого жидкостью тела. Линию, ограничивающую эту часть поверхности тела, называют *линией отрыва*. От нее отходит поверхность раздела между областью турбулентности и остальным объемом жидкости. Самое образование турбулентной области при обтекании тела называют *явлением отрыва*.

Форма турбулентной области определяется свойствами движения в основном объеме жидкости (т. е. не в непосредственной близости от поверхности тела). Не существующая пока полная теория турбулентности должна была бы дать принципиальную возможность определения этой формы с помощью уравнений движения идеальной жидкости, если задано положение линии отрыва на поверхности тела. Действительное же положение линии отрыва определяется свойствами движения в непосредственной близости поверхности тела (в так называемом пограничном слое), где существенную роль играет вязкость жидкости (см. § 40).

Говоря (в следующих параграфах) о свободной границе турбулентной области, мы будем подразумевать, естественно, ее усредненное по времени положение. Мгновенное же положение границы представляет собой очень нерегулярную поверхность; эти нерегулярные искажения и их изменение со временем связаны в основном с крупномасштабными пульсациями и соответственно простираются в глубину на расстояния, сравнимые с основным масштабом турбулентности. Нерегулярное движение граничной поверхности приводит к тому, что фиксированная в пространстве точка потока (не слишком удаленная от среднего положения поверхности) будет оказываться попеременно по ту или другую сторону границы. При наблюдении картины движения в этой точке будут обнаруживаться попеременные периоды наличия или отсутствия мелкомасштабной турбулентности[1]).

§ 36. Турбулентная струя

Форма, а также и некоторые другие основные свойства турбулентных областей в ряде случаев могут быть установлены уже с помощью простых соображений подобия. Сюда относятся прежде всего различного рода свободные турбулентные струи, распространяющиеся в заполненном жидкостью же пространстве (*L. Prandtl*, 1925).

В качестве первого примера рассмотрим турбулентную область, возникающую при отрыве потока с края угла, образованного двумя пересекающимися бесконечными плоскостями (на рис. 24 изображен их поперечный разрез). При ламинарном обтекании (рис. 3) поток жидкости, идущей вдоль одной из сторон угла (скажем, в направлении от A к O), плавно поворачивался бы, переходя в поток, идущий вдоль второй плоскости в направлении от края угла (от O к B). При турбулентном же обтекании картина движения оказывается совершенно иной.

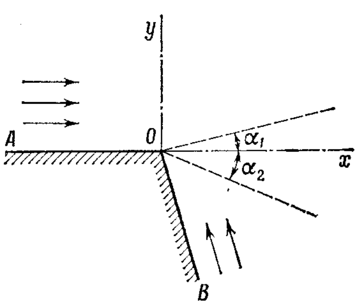

Рис. 24

Поток жидкости, идущий вдоль одной из сторон угла, теперь не поворачивается, дойдя до края угла, а продолжает распространяться в прежнем направлении. Вдоль другой же стороны возникает поток жидкости, подтекающей в направлении к краю угла (от B к O). Смешивание обоих потоков происходит в турбулентной области[2]) (границы сечения этой области указаны на рис. 24 штриховой линией). Происхождение такой области можно наглядно описать следующим образом. Представим себе такое течение жидкости, при котором идущий от A к O равномерный поток продолжал бы течь в том же направлении, заполняя все пространство кверху от плоскости AO и ее продолжения

---

[1]) Об этом свойстве говорят как о *перемежаемости* турбулентности. Его надо отличать от аналогичного свойства структуры движения в глубине турбулентной области, которое тоже называют перемежаемостью. В этой книге не рассматриваются существующие модельные представления об этих явлениях.

[2]) Напоминаем, что вне турбулентной области имеет место безвихревое турбулентное движение, постепенно переходящее в ламинарное по мере удаления от границ этой области.