положения поверхности) будет оказываться попеременно по ту или другую сторону границы. При наблюдении картины движения в этой точке будут обнаруживаться попеременные периоды наличия или отсутствия мелкомасштабной турбулентности[1]).

§ 36. Турбулентная струя

Форма, а также и некоторые другие основные свойства турбулентных областей в ряде случаев могут быть установлены уже с помощью простых соображений подобия. Сюда относятся прежде всего различного рода свободные турбулентные струи, распространяющиеся в заполненном жидкостью же пространстве (*L. Prandtl*, 1925).

В качестве первого примера рассмотрим турбулентную область, возникающую при отрыве потока с края угла, образованного двумя пересекающимися бесконечными плоскостями (на рис. 24 изображен их поперечный разрез). При ламинарном обтекании (рис. 3) поток жидкости, идущей вдоль одной из сторон угла (скажем, в направлении от A к O), плавно поворачивался бы, переходя в поток, идущий вдоль второй плоскости в направлении от края угла (от O к B). При турбулентном же обтекании картина движения оказывается совершенно иной.

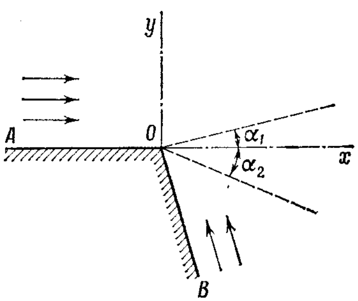

Рис. 24

Поток жидкости, идущий вдоль одной из сторон угла, теперь не поворачивается, дойдя до края угла, а продолжает распространяться в прежнем направлении. Вдоль другой же стороны возникает поток жидкости, подтекающей в направлении к краю угла (от B к O). Смешивание обоих потоков происходит в турбулентной области[2]) (границы сечения этой области указаны на рис. 24 штриховой линией). Происхождение такой области можно наглядно описать следующим образом. Представим себе такое течение жидкости, при котором идущий от A к O равномерный поток продолжал бы течь в том же направлении, заполняя все пространство кверху от плоскости AO и ее продолжения

[1]) Об этом свойстве говорят как о *перемежаемости* турбулентности. Его надо отличать от аналогичного свойства структуры движения в глубине турбулентной области, которое тоже называют перемежаемостью. В этой книге не рассматриваются существующие модельные представления об этих явлениях.

[2]) Напоминаем, что вне турбулентной области имеет место безвихревое турбулентное движение, постепенно переходящее в ламинарное по мере удаления от границ этой области.

направо в глубь жидкости, а в пространстве под этой плоскостью жидкость была бы вообще неподвижна. Другими словами, мы имели бы при этом поверхность разрыва (продолжение плоскости AO) между жидкостью, текущей с постоянной скоростью, и жидкостью неподвижной. Но такая поверхность разрыва является неустойчивой и не может реально существовать (см. § 29). Эта неустойчивость приводит к ее «разбалтыванию» и образованию области турбулентного движения. Подтекающий от B к O поток возникает при этом в результате того, что в область турбулентности должно происходить втекание жидкости извне.

Определим форму области турбулентного движения. Выберем ось x указанным на рис. 24 образом; начало координат находится в точке O. Обозначим посредством Y_1 и Y_2 расстояния от плоскости x, z до верхней и нижней границ турбулентной области; требуется определить зависимость Y_1 и Y_2 от x. Эту зависимость легко определить непосредственно из соображений подобия. Поскольку все размеры плоскостей бесконечны, то в нашем распоряжении нет никаких характерных для рассматриваемого движения постоянных параметров с размерностью длины. Отсюда следует, что единственной возможной зависимостью величин Y_1, Y_2 от расстояния x является их прямая пропорциональность:

$$Y_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot x, \quad Y_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot x. \tag{36,1}$$

Коэффициенты пропорциональности являются просто численными постоянными; мы пишем их в виде $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, так что α_1 и α_2 — углы наклона обеих границ турбулентной области к оси x. Таким образом, область турбулентного движения ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии края обтекаемого угла.

Значения углов α_1 и α_2 зависят только от величины обтекаемого угла и не зависят, например, от скорости набегающего потока жидкости. Они не могут быть вычислены теоретически; экспериментальные данные дают, например, для обтекания прямого угла значения $\alpha_1 = 5°$, $\alpha_2 = 10°$ [1]).

Скорости потоков жидкости с обеих сторон угла неодинаковы; их отношение является определенным числом, зависящим опять-таки только от величины угла. При не слишком малых углах одна из скоростей оказывается значительно больше другой — именно, большей является скорость «основного» потока, в направлении которого расположена турбулентная область (поток от A к O). Так, при обтекании прямого угла скорость

---

[1]) Здесь и в других случаях ниже имеются в виду экспериментальные данные о распределении скоростей в поперечном сечении турбулентной струи, обработанные с помощью расчетов по полуэмпирическим теориям турбулентности (см. примечание на с. 214).

потока вдоль плоскости AO в 30 раз больше скорости потока от B к O.

Отметим еще, что разность давлений жидкости по обе стороны турбулентной области очень мала. Так, при обтекании прямого угла оказывается

$$p_1 - p_2 = 0{,}003\rho U_1^2,$$

где U_1 — скорость набегающего потока (от A к O), p_1 — давление в верхнем (вдоль AO), а p_2 — в нижнем (вдоль BO) потоках жидкости.

В предельном случае равного нулю обтекаемого угла мы имеем дело просто с краем пластинки, вдоль обеих сторон которой течет жидкость. Угол раствора $\alpha_1 + \alpha_2$ турбулентной области при этом тоже обращается в нуль, т. е. турбулентная область исчезает; скорости же потоков по обеим сторонам пластинки становятся одинаковыми. При увеличении же угла AOB наступает момент, когда плоскость BO касается нижней границы турбулентной области; угол AOB является при этом уже тупым. При дальнейшем увеличении угла AOB область турбулентности будет оставаться ограниченной с одной стороны поверхностью твердой стенки. По существу, мы имеем при этом дело просто с явлением отрыва, с линией отрыва вдоль края угла. Угол раствора турбулентной области остается все время конечным.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о бьющей из конца тонкой трубки турбулентной струе, распространяющейся в неограниченном пространстве, заполненном той же жидкостью (задача о ламинарном движении в такой «затопленной» струе была решена в § 23). На больших по сравнению с размерами отверстия трубы расстояниях (о которых только и будет идти речь) струя аксиально симметрична вне зависимости от конкретной формы отверстия.

Определим форму области турбулентного движения в струе. Выберем ось струи в качестве оси x, а радиус области турбулентности обозначим посредством R; требуется определить зависимость R от x (x отсчитывается от точки выхода струи). Как и в предыдущем примере, эту зависимость легко определить непосредственно из соображений размерности. На расстояниях, больших по сравнению с размерами отверстия трубы, конкретная форма и размеры отверстия не могут играть роли для формы струи. Поэтому в нашем распоряжении нет никаких характеристических параметров с размерностью длины. Отсюда опять следует, что R должно быть пропорционально x:

$$R = \operatorname{tg}\alpha \cdot x, \qquad (36{,}2)$$

где численная постоянная $\operatorname{tg}\alpha$ одинакова для всех струй. Таким образом, турбулентная область представляет собой конус; эксперимент дает для угла раствора 2α этого конуса значение около 25° (рис. 25)[1]).

Движение в струе происходит в основном вдоль ее оси. Ввиду отсутствия каких-либо параметров размерности длины или скорости, которые могли бы характеризовать движение в струе[2]), распределение продольной (средней по времени) скорости u_x в ней должно иметь вид

$$u_x(r,\ x) = u_0(x)\, f\left(\frac{r}{R(x)}\right), \qquad (36,3)$$

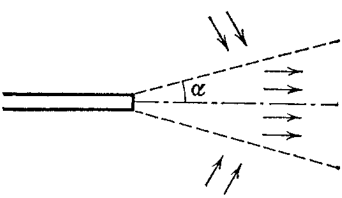

Рис. 25

где r — расстояние от оси струи, а u_0 — скорость на оси. Другими словами, профили скорости в различных сечениях струи отличаются только масштабами измерения расстояния и скорости (в этой связи говорят об *автомодельности* структуры струи). Функция $f(\xi)$ (равная 1 при $\xi = 0$) быстро убывает с увеличением ее аргумента. Она становится равной 1/2 уже при $\xi = 0{,}4$, а на границе турбулентной области достигает значения $\sim 0{,}01$. Что касается поперечной скорости, то она сохраняет вдоль сечения турбулентной области примерно одинаковый порядок величины и на границе области равна около $-0{,}025 u_0$, будучи направлена здесь внутрь струи. За счет этой поперечной скорости и осуществляется втекание жидкости в турбулентную область. Движение вне турбулентной области можно определить теоретически (см. задачу 1).

Зависимость скорости в струе от расстояния x можно определить, исходя из следующих простых соображений. Полный поток импульса в струе через сферическую поверхность (с центром в точке выхода струи) должен оставаться неизменным при изменении ее радиуса. Плотность потока импульса в струе $\sim \rho u^2$, где u — порядок величины некоторой средней скорости в струе. Площадь той части поперечного сечения струи, в которой скорость заметно отлична от нуля, порядка величины R^2. Поэтому полный поток импульса $P \sim \rho u^2 R^2$. Подставив сюда (36,2), получим

$$u \sim \sqrt{\frac{P}{\rho}}\,\frac{1}{x}, \qquad (36,4)$$

[1]) Формула (36,2) дает $R = 0$ при $x = 0$, т. е. отсчет координаты x ведется от точки, которая была бы выходной для струи, бьющей из точечного источника. Эта точка может не совпадать с реальным положением выходного отверстия, отстоя от него (назад) на расстояние того же порядка величины, которое требуется для установления закона (36,2). Интересуясь асимптотическим законом при больших x, этим отличием можно пренебречь.

[2]) Напомним лишний раз, что речь идет о развитой турбулентности в струе и потому вязкость не должна входить в рассматриваемые формулы.

т. е. скорость падает обратно пропорционально расстоянию от точки выхода струи.

Количество (масса) жидкости Q, протекающей в единицу времени через поперечное сечение турбулентной области струи — порядка величины произведения $\rho u R^2$. Подставив сюда (36,2) и (36,4), найдем, что $Q = \text{const}\cdot x$ (если две переменные величины, меняющиеся в широких пределах всегда одного порядка величины, то они вообще пропорциональны друг другу; поэтому мы пишем формулу со знаком равенства). Коэффициент пропорциональности здесь удобно выразить не через поток импульса P, а через количество жидкости Q_0, выбрасываемой в единицу времени из трубки. На расстояниях порядка величины линейных размеров отверстия трубки a должно быть $Q \sim Q_0$. Отсюда следует, что $\text{const} \sim Q_0/a$, так что можно написать

$$Q = \beta Q_0 \frac{x}{a}, \tag{36,5}$$

где β — численный коэффициент, зависящий только от формы отверстия. Так, для круглого отверстия с радиусом a эмпирическое значение $\beta \approx 1{,}5$. Таким образом, расход жидкости через сечение турбулентной области возрастает с расстоянием x, — жидкость втягивается в турбулентную область[1]).

Движение в каждом участке длины струи характеризуется числом Рейнольдса для этого участка, определяемым как $\frac{uR}{\nu}$. Но в силу (36,2) и (36,4) произведение uR остается постоянным вдоль струи, так что число Рейнольдса одинаково для всех участков струи. В качестве этого числа может быть выбрано отношение $Q_0/\rho a\nu$. Входящая сюда постоянная Q_0/a является тем единственным параметром, который определяет все движения в струе. При увеличении «мощности» струи Q_0 (при заданной величине a отверстия) достигается в конце концов некоторое критическое значение числа Рейнольдса, после которого движение делается турбулентным одновременно вдоль всей длины струи[2]).

---

[1]) Полный же поток жидкости через всю бесконечную плоскость, проведенную поперек струи, бесконечен — струя, бьющая в неограниченное пространство, увлекает с собой бесконечное количество жидкости.

[2]) Для более подробного расчета различных случаев турбулентного движения обычно пользуются различными «полуэмпирическими» теориями, основанными на определенных предположениях о зависимости коэффициента турбулентной вязкости от градиента средней скорости. Так, в теории Прандтля полагается (для плоского течения)

$$\nu_{\text{турб}} = l^2 \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|,$$

причем зависимость l (так называемой «длины пути перемешивания») от координат выбирается в соответствии с соображениями подобия; для свободных турбулентных струй, например, полагается $l = cx$, где c — эмпирическая

Задачи

1. Определить среднее движение жидкости в струе вне турбулентной области.

Решение. Выбираем сферические координаты r, θ, φ с полярной осью вдоль оси струи и началом координат в точке ее выхода. В силу аксиальной симметрии струи компонента u_φ средней скорости отсутствует, а u_θ, u_r являются функциями только от r и θ. Те же соображения, что и в задаче о ламинарной струе в § 23, показывают, что u_r, u_θ должны иметь вид

$$u_\theta = \frac{f(\theta)}{r}, \quad u_r = \frac{F(\theta)}{r}.$$

Вне турбулентной области движение жидкости потенциально, т. е. $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$, откуда

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) = 0.$$

Но $r u_\theta$ не зависит от r, поэтому $\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{dF}{d\theta} = 0$, откуда $F = \mathrm{const} \equiv -b$, т. е.

$$u_r = -\frac{b}{r}. \tag{1}$$

Из уравнения непрерывности

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, u_\theta) = 0$$

получаем теперь:

$$f = \frac{\mathrm{const} - b\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Постоянная интегрирования должна быть положена равной $-b$, чтобы скорость не обращалась в бесконечность при $\theta = \pi$ (что касается обращения f в бесконечность при $\theta = 0$, то оно несущественно, поскольку рассматриваемое здесь решение относится только к пространству вне турбулентной области, а направление $\theta = 0$ лежит внутри нее). Таким образом,

$$u_\theta = -\frac{b}{r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{b}{r}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{2}$$

Проекция скорости на направление струи (u_x) и абсолютная величина скорости равны

$$u_x = \frac{b}{r} = \frac{b\cos\theta}{x}, \quad u = \frac{b}{r}\frac{1}{\sin(\theta/2)}. \tag{3}$$

Постоянную b можно связать с постоянной $B = \beta Q_0/a$, входящей в формулу (36,5). Рассмотрим отрезок конуса турбулентной области, вырезаемый

численная постоянная. Такие теории обычно дают хорошее согласие с опытом и потому имеют прикладное значение в качестве хороших интерполяционных расчетных схем. При этом, однако, оказывается невозможным приписать входящим в теорию характерным эмпирическим численным постоянным универсальных значений; так, например, отношение длины пути перемешивания l к поперечным размерам турбулентной области приходится выбирать различным для разных конкретных случаев. Следует также отметить, что хорошее согласие с опытными данными удается получить, исходя из различных выражений для турбулентной вязкости.

двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Количество жидкости, втекающей в 1 с извне в этот участок турбулентной области, равно

$$dQ = -2\pi r\rho \sin \alpha u_\theta \, dr = 2\pi b\rho (1 + \cos \alpha) \, dr,$$

а из формулы (36,5) имеем $dQ = B\,dx = B \cos \alpha \, dr$. Сравнивая оба выражения, получаем:

$$b = \frac{B}{2\pi\rho} \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \tag{4}$$

На границе турбулентной области скорость $\mathbf{u}$ направлена внутрь этой области, образуя угол $(\pi - \alpha)/2$ с положительным направлением оси x.

Сравним среднюю скорость внутри турбулентной области, определенную как

$$\bar{u}_x = \frac{Q}{\pi R^2 \rho} = \frac{B}{\pi \rho x \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

со скоростью $(u_x)_{\text{пот}}$ на границе этой области. Взяв первую из формул (3) с $\theta = \alpha$, получим

$$\frac{(u_x)_{\text{пот}}}{\bar{u}_x} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

При $\alpha = 12°$ получаем для этого отношения значение 0,011, т. е. на границе турбулентной области скорость мала по сравнеиню со средней скоростью внутри области.

2. Определить закон изменения размеров и скорости в турбулентной затопленной струе, бьющей из бесконечно длинной тонкой щели.

Решение. По тем же причинам, как и для аксиальной струи, заключаем, что турбулентная область ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии щели, т. е. полуширина струи:

$$Y = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Поток импульса в струе (отнесенной к единице длины щели) — порядка $\rho u^2 Y$. Для зависимости средней скорости u от x получаем поэтому

$$u \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}.$$

Расход жидкости через сечение турбулентной области струи $Q \sim \rho u Y$, откуда

$$Q = \text{const} \cdot \sqrt{x}.$$

Местное число Рейнольдса $\mathrm{R} = uY/\nu$ возрастает с x по такому же закону.

Эмпирическое значение угла раствора плоской струи — примерно такое же, как у круглой струи ($2\alpha \approx 25°$).

§ 37. Турбулентный след

При числах Рейнольдса, значительно превышающих критическое значение, при обтекании твердого тела потоком жидкости позади тела образуется длинная область турбулентного движения. Эту область называют *турбулентным следом*. На больших (по сравнению с размерами тела) расстояниях простые соображения позволяют определить форму следа и закон убывания скорости жидкости в нем (*L. Prandtl*, 1926).