двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Количество жидкости, втекающей в 1 с извне в этот участок турбулентной области, равно

$$dQ = -2\pi r\rho \sin\alpha u_\theta \, dr = 2\pi b\rho \, (1+\cos\alpha) \, dr,$$

а из формулы (36,5) имеем $dQ = B\,dx = B\cos\alpha\,dr$. Сравнивая оба выражения, получаем:

$$b = \frac{B}{2\pi\rho} \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{4}$$

На границе турбулентной области скорость $\mathbf{u}$ направлена внутрь этой области, образуя угол $(\pi-\alpha)/2$ с положительным направлением оси x.

Сравним среднюю скорость внутри турбулентной области, определенную как

$$\bar{u}_x = \frac{Q}{\pi R^2\rho} = \frac{B}{\pi\rho x \operatorname{tg}^2\alpha}$$

со скоростью $(u_x)_{\text{пот}}$ на границе этой области. Взяв первую из формул (3) с $\theta = \alpha$, получим

$$\frac{(u_x)_{\text{пот}}}{\bar{u}_x} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

При $\alpha = 12°$ получаем для этого отношения значение 0,011, т. е. на границе турбулентной области скорость мала по сравнеиню со средней скоростью внутри области.

2. Определить закон изменения размеров и скорости в турбулентной затопленной струе, бьющей из бесконечно длинной тонкой щели.

Решение. По тем же причинам, как и для аксиальной струи, заключаем, что турбулентная область ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии щели, т. е. полуширина струи:

$$Y = x \operatorname{tg}\alpha.$$

Поток импульса в струе (отнесенной к единице длины щели) — порядка $\rho u^2 Y$. Для зависимости средней скорости u от x получаем поэтому

$$u \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}.$$

Расход жидкости через сечение турбулентной области струи $Q \sim \rho u Y$, откуда

$$Q = \text{const}\cdot\sqrt{x}.$$

Местное число Рейнольдса $\mathrm{R} = uY/\nu$ возрастает с x по такому же закону.

Эмпирическое значение угла раствора плоской струи — примерно такое же, как у круглой струи ($2\alpha \approx 25°$).

§ 37. Турбулентный след

При числах Рейнольдса, значительно превышающих критическое значение, при обтекании твердого тела потоком жидкости позади тела образуется длинная область турбулентного движения. Эту область называют *турбулентным следом*. На больших (по сравнению с размерами тела) расстояниях простые соображения позволяют определить форму следа и закон убывания скорости жидкости в нем (*L. Prandtl*, 1926).

Как и при исследовании ламинарного следа в § 21, обозначим посредством $\mathbf{U}$ скорость натекающего на тело потока и выберем ее направление в качестве оси x. Усредненную же по турбулентным пульсациям скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде $\mathbf{U}+\mathbf{u}$. Обозначив посредством a некоторую поперечную ширину следа, мы определим зависимость a от x. Если при обтекании тела подъемная сила отсутствует, то на больших расстояниях от тела след обладает аксиальной симметрией и имеет круговое сечение; величиной a может являться в этом случае радиус следа. Наличие же подъемной силы приводит к появлению некоторого избранного направления в плоскости y, z, и след уже не будет обладать аксиальной симметрией ни на каких расстояниях от тела.

Продольная компонента скорости жидкости в следе $\sim U$, а поперечная — порядка некоторого среднего значения u турбулентной скорости. Поэтому угол между линиями тока и осью x — порядка величины отношения u/U. С другой стороны, граница следа является, как мы знаем, границей, за которую не выходят линии тока вихревого турбулентного движения. Отсюда следует, что угол наклона линии контура продольного сечения следа к оси x — тоже порядка величины u/U. Это значит, что мы можем написать:

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{u}{U}. \tag{37,1}$$

Далее, воспользуемся формулами (21,1—2), определяющими действующие на тело силы через интегралы от скорости жидкости в следе (причем под скоростью подразумевается теперь ее усредненное значение). В этих интегралах область интегрирования $\sim a^2$. Поэтому оценка интеграла приводит к соотношению $F \sim \rho U u a^2$, где F — порядок величины силы сопротивления или подъемной силы. Таким образом:

$$u \sim \frac{F}{\rho U a^2}. \tag{37,2}$$

Подставляя это в (37,1), находим:

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{F}{\rho U^2 a^2},$$

откуда путем интегрирования

$$a \sim \left(\frac{Fx}{\rho U^2}\right)^{1/3}. \tag{37,3}$$

Таким образом, ширина следа растет пропорционально кубическому корню из расстояния от тела. Для скорости u имеем из (37,2) и (37,3):

$$u \sim \left(\frac{FU}{\rho x^2}\right)^{1/3}, \tag{37,4}$$

т. е. средняя скорость движения жидкости внутри следа падает обратно пропорционально $x^{2/3}$

Движение жидкости в каждом участке длины следа характеризуется числом Рейнольдса $R \sim au/\nu$. Подставляя (37,3) и (37,4), получаем:

$$R \sim \frac{F}{\nu\rho U a} \sim \frac{1}{\nu}\left(\frac{F^2}{\rho^2 U x}\right)^{1/3}.$$

Мы видим, что это число не остается постоянным вдоль длины следа в противоположность тому, что мы имели в случае турбулентной струи. На достаточно больших расстояниях от тела R делается настолько малым, что движение в следе перестает быть турбулентным. Дальше простирается область ламинарного следа, свойства которого были уже исследованы в § 21.

В § 21 были получены формулы, описывающие движение жидкости вне следа вдали от тела. Эти формулы применимы к движению вне турбулентного следа в той же мере, что и вне ламинарного следа.

Отметим здесь некоторые общие свойства распределения скоростей вокруг обтекаемого тела. Как внутри турбулентного следа, так и вне его, скорость (речь идет везде о скорости $\mathbf{u}$) падает с увеличением расстояния от тела. При этом, однако, продольная скорость u_x падает вне следа значительно быстрее (как $1/x^2$), чем внутри следа. Поэтому вдали от тела можно считать, что продольная скорость u_x имеется только внутри следа, а вне его $u_x = 0$. Можно сказать, что u_x спадает от некоторого максимального значения на «оси» следа до нуля на его границе. Что же касается поперечных скоростей u_y, u_z, то на границе следа они того же порядка величины, что и внутри него, а при удалении от следа (при неизменном расстоянии от тела) они быстро падают.

§ 38. Теорема Жуковского

Описанный в конце предыдущего параграфа характер распределения скоростей вокруг обтекаемого тела не относится к исключительным случаям, когда толщина образующегося за телом следа очень мала по сравнению с его шириной. Такой след образуется при обтекании тел, толщина которых (в направлении оси y) мала по сравнению с их шириной в направлении z (длина же в направлении обтекания — оси x — может быть произвольной). другими словами, речь идет об обтекании тел, поперечное (к направлению движения) сечение которых обладает сильно вытянутой в одном направлении формой. Сюда относятся, в частности, обтекания *крыльев* — тел, размах которых велик по сравнению со всеми остальными их размерами.

Ясно, что в таком случае нет никаких причин для того, чтобы перпендикулярная к плоскости турбулентного следа скорость u_y