т. е. средняя скорость движения жидкости внутри следа падает обратно пропорционально $x^{2/3}$

Движение жидкости в каждом участке длины следа характеризуется числом Рейнольдса $\mathrm{R} \sim au/\nu$. Подставляя (37,3) и (37,4), получаем:

$$\mathrm{R} \sim \frac{F}{\nu\rho U a} \sim \frac{1}{\nu}\left(\frac{F^2}{\rho^2 U x}\right)^{1/3}.$$

Мы видим, что это число не остается постоянным вдоль длины следа в противоположность тому, что мы имели в случае турбулентной струи. На достаточно больших расстояниях от тела R делается настолько малым, что движение в следе перестает быть турбулентным. Дальше простирается область ламинарного следа, свойства которого были уже исследованы в § 21.

В § 21 были получены формулы, описывающие движение жидкости вне следа вдали от тела. Эти формулы применимы к движению вне турбулентного следа в той же мере, что и вне ламинарного следа.

Отметим здесь некоторые общие свойства распределения скоростей вокруг обтекаемого тела. Как внутри турбулентного следа, так и вне его, скорость (речь идет везде о скорости **u**) падает с увеличением расстояния от тела. При этом, однако, продольная скорость u_x падает вне следа значительно быстрее (как $1/x^2$), чем внутри следа. Поэтому вдали от тела можно считать, что продольная скорость u_x имеется только внутри следа, а вне его $u_x = 0$. Можно сказать, что u_x спадает от некоторого максимального значения на «оси» следа до нуля на его границе. Что же касается поперечных скоростей u_y, u_z, то на границе следа они того же порядка величины, что и внутри него, а при удалении от следа (при неизменном расстоянии от тела) они быстро падают.

§ 38. Теорема Жуковского

Описанный в конце предыдущего параграфа характер распределения скоростей вокруг обтекаемого тела не относится к исключительным случаям, когда толщина образующегося за телом следа очень мала по сравнению с его шириной. Такой след образуется при обтекании тел, толщина которых (в направлении оси y) мала по сравнению с их шириной в направлении z (длина же в направлении обтекания — оси x — может быть произвольной). другими словами, речь идет об обтекании тел, поперечное (к направлению движения) сечение которых обладает сильно вытянутой в одном направлении формой. Сюда относятся, в частности, обтекания *крыльев* — тел, размах которых велик по сравнению со всеми остальными их размерами.

Ясно, что в таком случае нет никаких причин для того, чтобы перпендикулярная к плоскости турбулентного следа скорость u_y

заметно уменьшалась уже на расстояниях порядка толщины следа. Напротив, эта скорость будет теперь иметь одинаковый порядок величины как внутри следа, так и на значительных (порядка размаха крыла) расстояниях от него. При этом, конечно, предполагается, что подъемная сила отлична от нуля; в противном случае поперечная скорость практически вообще отсутствует.

Рассмотрим вертикальную подъемную силу F_y, развивающуюся при таком обтекании. Согласно формуле (21,2) она определяется интегралом

$$F_y = -\rho U \iint u_y \, dy \, dz, \tag{38,1}$$

причем ввиду характера распределения скорости u_y интегрирование в данном случае должно производиться по всей поперечной плоскости. Более того, поскольку толщина следа (по оси y) мала, а скорость u_y внутри него отнюдь не велика по сравнению с этой же скоростью вне следа, то в рассматриваемом случае можно с достаточной точностью ограничиться при интегрировании по dy интегрированием только по области вне следа, т. е. написать:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_y \, dy \approx \int_{y_1}^{\infty} u_y \, dy + \int_{-\infty}^{y_2} u_y \, dy,$$

где y_1 и y_2 — координаты границ следа (рис. 26).

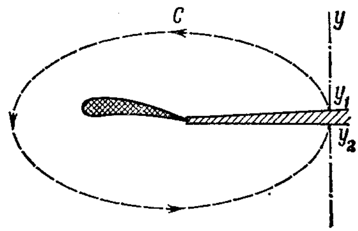

Рис. 26

Но вне следа движение потенциально и $u_y = \partial\varphi/\partial y$; имея в виду, что на бесконечности $\varphi = 0$, получаем поэтому

$$\int u_y \, dy = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где φ_2 и φ_1 — значения потенциала на обеих сторонах следа; можно сказать, что $\varphi_2 - \varphi_1$ есть скачок потенциала на поверхности разрыва, которой можно заменить тонкий след. Что же касается производных от φ, то производная $u_y = \partial\varphi/\partial y$ должна оставаться непрерывной. Скачок нормальной к поверхности следа компоненты скорости означал бы, что некоторое количество жидкости втекает в след; между тем, в приближении, в котором толщина следа пренебрегается, этот эффект должен отсутствовать. Таким образом, мы заменяем след поверхностью тангенциального разрыва. Далее, в этом же приближении на следе должно быть непрерывно также и давление. Поскольку изменение давления определяется согласно формуле Бернулли в первом приближении величиной $\rho U u_x = \rho U \partial\varphi/\partial x$, от отсюда следует, что должна быть непрерывна и производная $\partial\varphi/\partial x$. Производная же $\partial\varphi/\partial z$ — скорость в направлении размаха крыла — испытывает, вообще говоря, скачок.

Ввиду непрерывности производной $\partial\varphi/\partial x$ скачок $\varphi_2 - \varphi_1$ есть величина, зависящая только от z, но не от координаты x вдоль длины следа. Таким образом, получаем для подъемной силы следующую формулу:

$$F_y = -\rho U \int (\varphi_2 - \varphi_1)\, dz. \tag{38,2}$$

Интегрирование по dz распространяется фактически лишь по ширине следа (вне следа, конечно, $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv 0$).

Эту формулу можно представить в несколько ином виде. Для этого замечаем, что по известным свойствам интегралов от градиента скаляра можно написать разность $\varphi_2 - \varphi_1$ в виде криволинейного интеграла

$$\int \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int (u_y\, dy + u_x\, dx),$$

взятого по контуру, выходящему из точки y_1, огибающему тело и приходящему в точку y_2, проходя, таким образом, везде в области потенциального движения. А благодаря тонкости следа можно, не изменяя интеграла с точностью до малых величин высшего порядка, дополнить этот длинный контур коротким отрезком от y_1 до y_2, превратив его таким образом в замкнутый. Обозначая посредством Γ циркуляцию скорости по замкнутому контуру C, охватывающему тело (рис. 26):

$$\Gamma = \oint \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1, \tag{38,3}$$

получаем для подъемной силы формулу

$$F_y = -\rho U \int \Gamma\, dz. \tag{38,4}$$

Знак циркуляции скорости выбирается всегда для обхода контура в направлении против часовой стрелки. Знак в формуле (38,3) связан также и с выбором направления обтекания: мы предполагали везде, что обтекание происходит в положительном направлении оси x (поток натекает слева направо).

Устанавливаемая формулой (38,4) связь подъемной силы с циркуляцией скорости составляет содержание *теоремы Н. Е. Жуковского* (1906). К применению этой теоремы к хорошо обтекаемым крыльям мы вернемся еще в § 46.

Задачи

1. Определить закон расширения турбулентного следа, образующегося при поперечном обтекании бесконечно длинного цилиндра.

Решение. Для силы сопротивления f_x, отнесенной к единице длины цилиндра, имеем по порядку величины $f_x \sim \rho U u Y$. Комбинируя это с соотношением (37,1), получаем для ширины следа Y:

$$Y = A\sqrt{\frac{xf_x}{\rho U^2}}, \tag{1}$$

где A — постоянная. Средняя скорость u в следе падает по закону

$$u \sim \sqrt{\frac{f_x}{\rho x}}.$$

Число Рейнольдса $R \sim Yu/\nu \sim f_x/\nu\rho U$ не зависит от x и потому ламинарного участка след не имеет.

Укажем, что согласно экспериментальным данным постоянный коэффициент в (1) равен $A = 0{,}9$ (причем Y есть полуширина следа); если под Y понимать расстояние, на котором скорость u_x падает до половины своего максимального значения по середине следа, то $A = 0{,}4$.

2. Определить движение вне следа, образующегося при поперечном обтекании бесконечно длинного тела.

Решение. Вне следа движение потенциально (потенциал обозначаем здесь посредством Φ в отличие от угла φ в цилиндрической системе координат r, z, φ с осью z вдоль длины тела). Подобно тому как было сделано в (21,16), заключаем, что должно быть

$$\int \mathbf{u}\, d\mathbf{f} = \int \nabla\Phi\, d\mathbf{f} = \frac{f_x}{\rho U},$$

где теперь интегрирование производится по поверхности цилиндра большого радиуса с осью вдоль оси x и длиной, равной единице, а f_x есть сила сопротивления, отнесенная к единице длины тела. Удовлетворяющее этому условию решение двухмерного уравнения Лапласа $\Delta\Phi = 0$ есть

$$\Phi = \frac{f_x}{2\pi\rho U}\ln r.$$

Далее, для подъемной силы имеем согласно (38,2)

$$f_y = \rho U(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Наименее быстро убывающим с расстоянием решением уравнения Лапласа, испытывающим скачок на плоскости $\varphi = 0$, является

$$\Phi = \text{const}\,\varphi = -\frac{f_y}{2\pi\rho U}\varphi$$

(выбор константы определяется тем, что $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$). Движение жидкости определяется суммой обоих найденных решений:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\rho U}(f_x \ln r - f_y\varphi). \tag{2}$$

Цилиндрические компоненты скорости $\mathbf{u}$ равны:

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{f_x}{2\pi\rho U r}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{f_y}{2\pi\rho U r}. \tag{3}$$

Скорость $\mathbf{u}$ образует с цилиндрическим радиус-вектором постоянный угол, тангенс которого равен f_y/f_x.

3. Определить закон изгибания следа за бесконечно длинным телом при наличии подъемной силы.

Решение. При наличии подъемной силы след (рассматриваемый как поверхность разрыва) изгибается в плоскости xy. Закон $y = y(x)$ этого изгибания определяется уравнением

$$\frac{dx}{u_x + U} = \frac{dy}{u_y}.$$

Подставив сюда согласно (3) $u_y \approx -f_y/2\pi\rho Ux$ и пренебрегая u_x по сравнению с U, получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_y}{2\pi\rho U^2 x},$$

откуда

$$y = \text{const} - \frac{f_y}{2\pi\rho U^2} \ln x.$$