ГЛАВА IV

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

§ 39. Ламинарный пограничный слой

Мы уже неоднократно ссылались на то обстоятельство, что очень большие числа Рейнольдса эквивалентны очень малой вязкости, в результате чего жидкость может рассматриваться при таких R как идеальная. Однако такое приближение во всяком случае непригодно для движения жидкости вблизи твердых стенок. Граничные условия для идеальной жидкости требуют лишь исчезновения нормальной составляющей скорости; касательная же к поверхности обтекаемого тела компонента скорости остается, вообще говоря, конечной. Между тем, у вязкой реальной жидкости скорость на твердых стенках должна обращаться в нуль.

Отсюда можно сделать вывод, что при больших числах Рейнольдса падение скорости до нуля будет происходить почти полностью в тонком пристеночном слое жидкости. Этот слой носит название пограничного и характеризуется, следовательно, наличием в нем значительных градиентов скорости. Движение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным. Здесь мы рассмотрим свойства ламинарного пограничного слоя. Граница этого слоя не является, конечно, резкой, и переход между ламинарным движением в нем и в основном потоке жидкости происходит непрерывным образом.

Падение скорости в пограничном слое обусловливается в конечном итоге вязкостью жидкости, которой нельзя пренебречь здесь, несмотря на большие значения R. Математически это проявляется в том, что градиенты скорости в пограничном слое велики и потому вязкие члены в уравнениях движения, содержащие производные от скорости по координатам, велики, несмотря на малость ν [1]).

Выведем уравнения движения жидкости в ламинарном пограничном слое. Для простоты вывода рассмотрим двухмерное обтекание жидкостью плоского участка поверхности тела. Эту плоскость выберем в качестве плоскости x, z, причем ось x направлена по направлению обтекания. Распределение скорости не зависит от координаты z; z-компонента скорости отсутствует.

Точные гидродинамические уравнения Навье — Стокса и уравнение непрерывности, написанные в компонентах, принимают

[1]) Идея и основные уравнения теории ламинарного пограничного слоя были сформулированы Прандтлем (*L. Prandtl*, 1904).

вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right), \tag{39,1}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right), \tag{39,2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39,3}$$

Движение предполагается стационарным, и потому производных по времени не пишем.

Ввиду тонкости пограничного слоя ясно, что движение в нем будет происходить в основном параллельно обтёкаемой поверхности, т. е. скорость v_y будет мала по сравнению с v_x (это видно уже и непосредственно из уравнения непрерывности).

Вдоль направления оси y скорость меняется быстро — заметное изменение ее происходит на расстояниях порядка толщины δ пограничного слоя. В направлении же оси x скорость меняется медленно; заметное изменение ее происходит здесь на протяжении расстояний порядка характеристической длины l задачи (скажем, размеров тела). Поэтому ее производные по y велики по сравнению с производными по x. Из сказанного следует, что в уравнении (39,1) можно пренебречь производной $\partial^2 v_x/\partial x^2$ по сравнению с $\partial^2 v_x/\partial y^2$, а сравнивая первое уравнение со вторым, мы видим, что производная $\partial p/\partial y$ мала по сравнению с $\partial p/\partial x$ (по порядку величины — в отношении v_y/v_x). В рассматриваемом приближении можно положить просто

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{39,4}$$

т. е. можно считать, что в пограничном слое нет поперечного градиента давления. Другими словами, давление в пограничном слое равно давлению $p(x)$, имеющемуся в основном потоке жидкости и являющемуся при решении задачи о пограничном слое заданной функцией от x. В уравнении (39,1) можно теперь написать вместо $\partial p/\partial x$ полную производную $dp(x)/dx$; эту производную можно выразить с помощью скорости $U(x)$ основного потока. Поскольку вне пограничного слоя движение потенциально, то справедливо уравнение Бернулли $p + \rho U^2/2 = \text{const}$, откуда

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений движения в ламинарном пограничном слое — *уравнения Прандтля* — в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = U\frac{dU}{dx}, \tag{39,5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39,6}$$

Граничные условия к этим уравнениям требуют обращения в нуль скорости на стенке:

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при } y = 0. \tag{39,7}$$

При удалении от стенки продольная скорость должна асимптотически приближаться к скорости основного потока:

$$v_x = U(x) \quad \text{при} \quad y \to \infty \tag{39,8}$$

(постановка же отдельного условия для v_y на бесконечности не требуется).

Можно легко показать, что уравнения (39,5—6) (выведенные для обтекания плоской стенки) остаются справедливыми и в более общем случае двухмерного обтекания тела (поперечное обтекание бесконечно длинного цилиндра произвольного сечения). При этом x есть расстояние, отсчитываемое по длине линии контура поперечного сечения тела от некоторой его точки, а y — расстояние от поверхности тела (по нормали к ней).

Пусть U_0 — характеристическая скорость данной задачи (например, скорость на бесконечности натекающего на тело потока жидкости). Введем вместо координат x, y и скоростей v_x, v_y безразмерные переменные x', y', v'_x, v'_y согласно определениям:

$$x = lx', \qquad y = \frac{ly'}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \qquad v_x = U_0 v'_x, \qquad v_y = \frac{U_0 v'_y}{\sqrt{\mathrm{R}}} \tag{39,9}$$

(и соответственно полагаем $U = U_0 U'$), где $\mathrm{R} = \frac{U_0 l}{\nu}$. Тогда уравнения (39,5—6) принимают вид

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} = U' \frac{dU'}{dx'}, \qquad \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0, \tag{39,10}$$

Эти уравнения (а также и граничные условия к ним) не содержат вязкости. Это значит, что их решения не зависят от числа Рейнольдса. Таким образом, мы приходим к важному результату: при изменении числа Рейнольдса вся картина движения в пограничном слое подвергается лишь подобному преобразованию, при котором продольные расстояния и скорости остаются неизменными, а поперечные меняются обратно пропорционально корню из R.

Далее, можно утверждать, что получающиеся в результате решения уравнений (39,10) безразмерные скорости v'_x, v'_y, как не зависящие от R, должны быть порядка величины единицы. Из формул (39,9) можно, следовательно, заключить, что

$$v_y \sim U_0/\sqrt{\mathrm{R}}, \tag{39,11}$$

т. е. отношение поперечной скорости к продольной обратно пропорционально $\sqrt{\mathrm{R}}$. То же самое относится к *толщине по-*

граничного слоя δ: в безразмерных координатах x', y' толщина $\delta' \approx 1$, а в реальных координатах x, y:

$$\delta \sim l/\sqrt{R}. \tag{39,12}$$

Применим уравнения пограничного слоя к обтеканию плоской полубесконечной пластинки плоско-параллельным потоком жидкости (*H. Blasius*, 1908). Пусть пластинка совпадает с полуплоскостью xz, соответствующей $x > 0$ (так что передним краем пластинки является линия $x = 0$). Скорость основного потока в этом случае постоянна: $U = \text{const}$. Уравнения (39,5—6) принимают вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39,13}$$

В решениях уравнений Прандтля величины v_x/U и $v_y(l/U\nu)^{1/2}$ могут быть, как мы видели, функциями только от $x' = x/l$ и $y' = y(U/l\nu)^{1/2}$. Но в задаче о полубесконечной пластинке нет никаких характерных параметров длины l. Поэтому v_x/U может зависеть только от такой комбинации x' и y', которая не содержала бы l; таковой является

$$\frac{y'}{\sqrt{x'}} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}.$$

Что же касается v_y, то здесь функцией от $y'/\sqrt{x'}$ должно быть произведение $v_y'\sqrt{x'}$.

Чтобы сразу учесть связь между v_x и v_y, выражаемую уравнением непрерывности, введем функцию тока ψ согласно определению (10,9):

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{39,14}$$

Указанным выше свойствам функций $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ отвечает функция тока вида

$$\psi = \sqrt{x\nu U}\, f(\xi), \qquad \xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}. \tag{39,15}$$

Тогда

$$v_x = Uf'(\xi), \qquad v_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}(\xi f' - f). \tag{39,16}$$

Уже без количественного определения функции $f(\xi)$ можно сделать следующий существенный вывод. Основной характеристикой движения в пограничном слое является распределение в нем продольной скорости v_x (поскольку v_y мала). Эта скорость возрастает от нуля на поверхности пластинки до определенной доли U при определенном значении ξ. Поэтому можно заключить, что толщина пограничного слоя на обтекаемой пластинке (определенная как значение y, на котором v_x/U достигает определенного значения ~ 1) — порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{x\nu/U}. \tag{39,17}$$

Таким образом, толщина пограничного слоя возрастает пропорционально корню из расстояния от края пластинки.

Подставив (39,16) в первое из уравнений (39,13) получим уравнение для функции $f(\xi)$:

$$ff'' + 2f''' = 0. \tag{39,18}$$

Граничные же условия (39,7—8) запишутся в виде

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \tag{39,19}$$

(распределение скоростей, очевидно, симметрично относительно плоскости $y = 0$; поэтому достаточно рассмотреть сторону $y > 0$). Уравнение (39,18) должно решаться численными методами. График получающейся таким образом функции $f'(\xi)$ изображен на

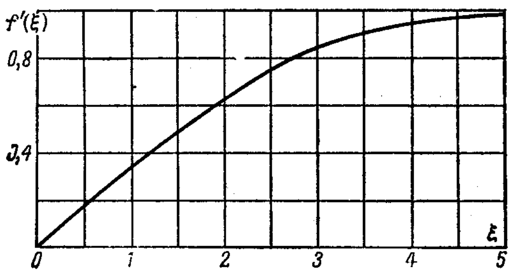

Рис. 27

рис. 27. Мы видим, что $f'(\xi)$ весьма быстро стремится к своему предельному значению — к единице. Предельный вид самой функции $f(\xi)$ при малых ξ:

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\alpha\xi^2 + O(\xi^5), \qquad \alpha = 0{,}332; \tag{39,20}$$

членов с ξ^3 и ξ^4 в этом разложении не может быть, в чем легко убедиться из уравнения (39,18). Предельный же вид функции при больших ξ:

$$f(\xi) = \xi - \beta, \qquad \beta = 1{,}72, \tag{39,21}$$

причем погрешность этого выражения, как можно показать, экспоненциально мала.

Сила трения, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \eta \left(\frac{U^3}{x\nu}\right)^{1/2} f''(0)$$

или

$$\sigma_{xy} = 0{,}332\sqrt{\frac{\eta\rho U^3}{x}}. \qquad (39{,}22)$$

Если пластинка имеет длину l (вдоль оси x), то полная действующая на нее сила трения (отнесенная к единице длины вдоль края пластинки) равна

$$F = 2\int_0^l \sigma_{xy}\,dx = 1{,}328\sqrt{\eta\rho l U^3} \qquad (39{,}23)$$

(множитель 2 учитывает наличие двух сторон пластинки)[1]. Отметим, что сила трения оказывается пропорциональной полуторной степени скорости натекающего потока. Формула (39,23) применима, конечно, только для длинных пластинок, для которых число $\mathrm{R} = Ul/\nu$ достаточно велико. Вместо силы обычно вводят коэффициент сопротивления как безразмерное отношение

$$C = \frac{F}{{}^1/_2\rho U^2 \cdot 2l}. \qquad (39{,}24)$$

Согласно (39,23) эта величина при ламинарном обтекании пластинки обратно пропорциональна корню из числа Рейнольдса:

$$C = 1{,}328\mathrm{R}^{-1/2}. \qquad (39{,}25)$$

В качестве точно определенной характеристики толщины пограничного слоя можно ввести так называемую *толщину вытеснения* δ^* согласно определению

$$U\delta^* = \int_0^\infty (U - v_x)\,dy. \qquad (39{,}26)$$

Подставив сюда v_x из (39,16), пишем:

$$\delta^* = \sqrt{\frac{x\nu}{U}}\int_0^\infty (1 - f')\,d\xi = \sqrt{\frac{x\nu}{U}}\,[\xi - f(\xi)]_{\xi\to\infty},$$

и с учетом предельного выражения (39,21):

$$\delta^* = \beta\sqrt{\frac{x\nu}{U}} = 1{,}72\sqrt{\frac{x\nu}{U}}. \qquad (39{,}27)$$

Выражение в правой стороне определения (39,26) есть «дефицит» расхода жидкости в пограничном слое по сравнению с тем, что было бы в однородном потоке со скоростью U. Поэтому мож-

[1]) Приближение пограничного слоя неприменимо у переднего края пластинки, где $\delta \gtrsim x$. Это обстоятельство, однако, несущественно при вычислении полной силы F ввиду быстрой сходимости интеграла на нижнем пределе.

но сказать, что δ^* есть расстояние, на которое обтекающий поток оттесняется наружу от пластинки из-за замедления жидкости в пограничном слое. С этим оттеснением связано и то обстоятельство, что поперечная скорость v_y в пограничном слое стремится при $y \to \infty$ не к нулю, а к конечному значению

$$v_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\,[\xi f' - f]_{\xi\to\infty} = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}} = 0{,}86\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\,. \qquad (39{,}28)$$

Полученные выше количественные формулы относятся, конечно, только к обтеканию пластинки. Качественные же результаты (такие как (39,11—12)) справедливы и для обтекания тела произвольной формы; при этом под l надо понимать размеры тела в направлении обтекания.

Упомянем особо еще о двух случаях пограничного слоя. Если плоский диск (большого радиуса) вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, то для оценки толщины пограничного слоя надо подставить в (39,17) Ωx вместо U (Ω — угловая скорость вращения). Тогда находим:

$$\delta \sim (\nu/\Omega)^{1/2}. \qquad (39{,}29)$$

Мы видим, что толщину пограничного слоя можно считать постоянной вдоль поверхности диска (в согласии с полученным в § 23 точным решением этой задачи). Что касается действующего на диск момента сил трения, то расчет с помощью уравнений пограничного слоя приводит, конечно, к формуле (23,4), поскольку эта формула является вообще точной и потому относится к ламинарному движению при любых R.

Наконец, остановимся на вопросе о ламинарном пограничном слое, возникающем на стенках трубы вблизи места входа жидкости в нее. Жидкость вступает в трубу обычно с распределением скоростей, почти постоянным по всему поперечному сечению, и падение скорости происходит только в пограничном слое. По мере удаления от входа начинают тормозиться слои жидкости все ближе к оси трубы. Поскольку количество протекающей жидкости должно оставаться постоянным, то наряду с уменьшением диаметра внутренней части течения (с почти постоянным профилем скоростей) происходит одновременное его ускорение. Так продолжается до тех пор, пока асимптотически не устанавливается пуазейлевское распределение скоростей, которое, таким образом, имеет место только на достаточно большом расстоянии от входа трубы. Легко определить порядок величины длины l этого так называемого начального участка течения. Он определяется тем, что на расстоянии l от входа толщина пограничного слоя делается порядка величины радиуса a трубы, так что пограничный слой как бы заполняет собой все ее сечение.

Полагая в (39,17) $x \sim l$ и $\delta \sim a$, получим:

$$l \sim a^2 U/\nu \sim a\mathrm{R}. \tag{39,30}$$

Таким образом, длина начального участка пропорциональна числу Рейнольдса[1]).

Задачи

1. Определить толщину пограничного слоя вблизи критической точки (см. § 10) на обтекаемом жидкостью теле.

Решение. Вблизи точки остановки скорость жидкости (вне пограничного слоя) является линейной функцией расстояния x от этой точки, так что $U = \mathrm{const}\cdot x$. Оценка членов уравнений (39,5—6) приводит к выражению $\delta \sim (\nu/\mathrm{const})^{1/2}$. Таким образом, вблизи критической точки толщина пограничного слоя остается конечной.

2. Определить движение в пограничном слое при конфузорном (см. § 23) течении между двумя пересекающимися плоскостями (*K. Pohlhausen*, 1921).

Решение. Рассматривая пограничный слой на одной из сторон угла, отсчитываем кординату x вдоль этой стороны от вершины угла O (рис. 8). При течении идеальной жидкости мы имели бы для скорости формулу $U = Q/\alpha\rho x$, выражающую собой просто сохранение расхода жидкости Q в потоке (α — угол между пересекающимися плоскостями). Таким образом, в правой стороне уравнения (39,5) будет стоять $U\,dU/dx = -Q^2/\alpha^2\rho^2x^3$. Легко видеть, что после этого уравнения (39,5—6) станут инвариантными по отношению к преобразованию $x \to ax$, $y \to ay$, $v_x \to v_x/a$, $v_y \to v_y/a$ с произвольной постоянной a. Это значит, что можно искать v_x и v_y в виде

$$v_x = \frac{Q}{\alpha\rho x} f(\xi), \quad v_y = \frac{Q}{\alpha\rho x} f_1(\xi), \quad \xi = \frac{y}{x},$$

тоже инвариантном относительно указанного преобразования. Из уравнения непрерывности (39,6) находим, что $f_1 = \xi f$, после чего из (39,5) получаем для функции $f(\xi)$ уравнение:

$$\frac{\rho\nu\alpha}{Q} f'' = 1 - f^2. \tag{1}$$

Граничные условия (39,8) означают, что должно быть $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$. Первый интеграл уравнения (1) есть

$$\frac{\rho\nu\alpha}{2Q} f'^2 = f - \frac{f^3}{3} + \mathrm{const}.$$

Поскольку при $\xi \to \infty$ функция f стремится к единице, то мы видим, что и f' стремится к определенному пределу, и ясно, что этот предел может быть только нулем. Определяя отсюда const, находим

$$\frac{\rho\nu\alpha}{2Q} f'^2 = -\frac{1}{3}(f-1)^2(f+2). \tag{2}$$

---

[1]) В этой книге не излагается значительно более сложная и менее наглядная теория пограничного слоя в сжимаемой жидкости. Сжимаемость должна учитываться при скоростях, сравнимых со скоростью звука (или превышающих ее). Ввиду возникающего при этом сильного разогрева газа и обтекаемого тела оказывается необходимым рассматривать уравнения движения в пограничном слое совместно с уравнением теплопередачи в нем. Может оказаться также необходимым учет температурной зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности газа.

Так как правая часть отрицательна в интервале $0 \leqslant f \leqslant 1$, то непременно должно быть $Q < 0$: пограничный слой рассматриваемого типа образуется только при конфузорном течении (с большими числами Рейнольдса $\mathrm{R} = |Q|/\rho\alpha\nu$), и не получается при диффузорном течении — в согласии с результатами § 23. Интегрируя еще раз, получаем окончательно:

$$f = 3\,\mathrm{th}^2\left[\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^{1/2}\xi\right]. \tag{3}$$

Толщина пограничного слоя $\delta \sim x/\mathrm{R}^{1/2}$. Значение производной $f'(0) = 2(\mathrm{R}/3)^{1/2}$, как это видно из (2). Поэтому сила трения, действующая на единицу площади стенки:

$$\sigma_{xy} = \eta\frac{U}{x}f'(0) = \left(\frac{4U^3\eta\rho}{3x}\right)^{1/2} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{\eta|Q|^3}{3\alpha^3\rho^2}\right)^{1/2}.$$

§ 40. Движение вблизи линии отрыва

При описании явления отрыва (§ 35) уже было указано, что реальное положение линии отрыва на поверхности обтекаемого тела определяется свойствами движения в пограничном слое. Мы увидим ниже, что в математическом отношении линия отрыва есть линия, точки которой являются особыми точками решений уравнений движения в пограничном слое (уравнений Прандтля). Задача состоит в том, чтобы определить свойства этих решений вблизи такой особой линии[1]).

От линии отрыва отходит, как мы знаем, уходящая в глубь жидкости поверхность, ограничивающая область турбулентного движения. Движение во всей турбулентной области является вихревым, между тем как при отсутствии отрыва оно было бы вихревым лишь в пограничном слое, где существенна вязкость жидкости, а в основном потоке ротор скорости отсутствовал бы. Поэтому можно сказать, что при отрыве происходит проникновение ротора скорости из пограничного слоя в глубь жидкости. Но в силу закона сохранения циркуляции скорости такое проникновение может произойти только путем непосредственного перемещения движущейся вблизи поверхности тела (в пограничном слое) жидкости в глубь основного потока. Другими словами, должен произойти как бы «отрыв» течения в пограничном слое от поверхности тела, в результате чего линии тока выходят из пристеночного слоя в глубь жидкости. (Поэтому и называют это явление отрывом или отрывом пограничного слоя.)

Уравнения движения в пограничном слое приводят, как мы видели, к результату, что в пограничном слое тангенциальная составляющая скорости (v_x) велика по сравнению с нормальной к поверхности тела компонентой (v_y). Такое соотношение между v_x и v_y органически связано с основными предположениями о характере движения в пограничном слое и должно необходимым

---

[1]) Излагаемая здесь, несколько отличная от обычной трактовка вопроса принадлежит *Л. Д. Ландау* (1944).