Так как правая часть отрицательна в интервале $0 \leqslant f \leqslant 1$, то непременно должно быть $Q < 0$: пограничный слой рассматриваемого типа образуется только при конфузорном течении (с большими числами Рейнольдса $\mathrm{R} = |Q|/\rho\alpha\nu$), и не получается при диффузорном течении — в согласии с результатами § 23. Интегрируя еще раз, получаем окончательно:

$$f = 3\,\mathrm{th}^2\left[\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^{1/2}\xi\right]. \qquad (3)$$

Толщина пограничного слоя $\delta \sim x/\mathrm{R}^{1/2}$. Значение производной $f'(0) = 2(\mathrm{R}/3)^{1/2}$, как это видно из (2). Поэтому сила трения, действующая на единицу площади стенки:

$$\sigma_{xy} = \eta\frac{U}{x}f'(0) = \left(\frac{4U^3\eta\rho}{3x}\right)^{1/2} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{\eta|Q|^3}{3\alpha^3\rho^2}\right)^{1/2}.$$

§ 40. Движение вблизи линии отрыва

При описании явления отрыва (§ 35) уже было указано, что реальное положение линии отрыва на поверхности обтекаемого тела определяется свойствами движения в пограничном слое. Мы увидим ниже, что в математическом отношении линия отрыва есть линия, точки которой являются особыми точками решений уравнений движения в пограничном слое (уравнений Прандтля). Задача состоит в том, чтобы определить свойства этих решений вблизи такой особой линии[1]).

От линии отрыва отходит, как мы знаем, уходящая в глубь жидкости поверхность, ограничивающая область турбулентного движения. Движение во всей турбулентной области является вихревым, между тем как при отсутствии отрыва оно было бы вихревым лишь в пограничном слое, где существенна вязкость жидкости, а в основном потоке ротор скорости отсутствовал бы. Поэтому можно сказать, что при отрыве происходит проникновение ротора скорости из пограничного слоя в глубь жидкости. Но в силу закона сохранения циркуляции скорости такое проникновение может произойти только путем непосредственного перемещения движущейся вблизи поверхности тела (в пограничном слое) жидкости в глубь основного потока. Другими словами, должен произойти как бы «отрыв» течения в пограничном слое от поверхности тела, в результате чего линии тока выходят из пристеночного слоя в глубь жидкости. (Поэтому и называют это явление отрывом или отрывом пограничного слоя.)

Уравнения движения в пограничном слое приводят, как мы видели, к результату, что в пограничном слое тангенциальная составляющая скорости (v_x) велика по сравнению с нормальной к поверхности тела компонентой (v_y). Такое соотношение между v_x и v_y органически связано с основными предположениями о характере движения в пограничном слое и должно необходимым

[1]) Излагаемая здесь, несколько отличная от обычной трактовка вопроса принадлежит *Л. Д. Ландау* (1944).

образом соблюдаться везде, где уравнения Прандтля имеют физически осмысленные решения. Математически оно во всяком случае имеет место во всех точках, не лежащих в непосредственной близости от особых точек. Но если $v_y \ll v_x$, то это значит, что жидкость движется вдоль поверхности тела, практически не отклоняясь от нее, так что никакого отрыва течения произойти не может. Таким образом, мы приходим к выводу, что отрыв может произойти лишь на той линии, точки которой являются особыми для решения уравнений Прандтля.

Характер этих особенностей тоже непосредственно следует из сказанного. Действительно, дойдя до линии отрыва, течение отклоняется, переходя из области пограничного слоя в глубь жидкости. Другими словами, нормальная составляющая скорости перестает быть малой по сравнению с тангенциальной и делается по крайней мере одного с нею порядка величины. Мы видели (см. (39.11)), что отношение $v_y/v_x \sim \mathrm{R}^{-1/2}$, так что возрастание v_y до $v_y \sim v_x$ означает увеличение в $\sqrt{\mathrm{R}}$ раз. Поэтому при достаточно больших числах Рейнольдса (о которых, разумеется, только и идет речь) можно считать, что v_y возрастает в бесконечное число раз. Если перейти в уравнениях Прандтля к безразмерным величинам (см. (39,10)), то описанное положение формально означает, что безразмерная скорость v'_y в решении уравнений становится на линии отрыва бесконечной.

Будем рассматривать для некоторого упрощения дальнейшего исследования двухмерную задачу о поперечном обтекании бесконечно длинного тела. Как обычно, x будет координатой вдоль поверхности тела в направлении течения, а координата y будет расстоянием от поверхности тела. Вместо линии отрыва здесь можно говорить о точке отрыва, подразумевая пересечение линии отрыва с плоскостью x, y; в выбранных координатах это есть точка $x = \mathrm{const} \equiv x_0$, $y = 0$. Область до точки отрыва пусть соответствует $x < x_0$.

Согласно полученным результатам при $x = x_0$ имеем при всех y [1])

$$v_y(x_0, y) = \infty. \tag{40,1}$$

Но в уравнениях Прандтля скорость v_y является своего рода вспомогательной величиной, которой при исследовании движения в пограничном слое обычно не интересуются (в связи с ее малостью). Поэтому желательно выяснить, какими свойствами обладает вблизи линии отрыва функция v_x.

Из (40,1) ясно, что при $x = x_0$ обращается в бесконечность также и производная $\partial v_y/\partial y$. Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{40,2}$$

[1]) Кроме только точки $y = 0$, в которой всегда должно быть $v_y = 0$ согласно граничным условиям на поверхности тела.

следует тогда, что и производная $\partial v_x/\partial x$ делается бесконечной при $x = x_0$, или

$$\left.\frac{\partial x}{\partial v_x}\right|_{v_x=v_0} = 0, \tag{40,3}$$

где x рассматривается как функция от v_x и y, а $v_0(y) = v_x(x_0, y)$. Вблизи точки отрыва разности $v_x - v_0$ и $x_0 - x$ малы, и можно разложить $x_0 - x$ в ряд по степеням $v_x - v_0$ (при заданном y). В силу условия (40,3) член первого порядка в этом разложении тождественно выпадает, и с точностью до члена второго порядка имеем:

$$x_0 - x = f(y)\,(v_x - v_0)^2$$

или

$$v_x = v_0(y) + \alpha(y)\sqrt{x_0 - x}, \tag{40,4}$$

где $\alpha = f^{-1/2}$ — некоторая функция только от y. Написав теперь

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\alpha(y)}{2\sqrt{x_0 - x}}$$

и интегрируя, получаем

$$v_y = \frac{\beta(y)}{\sqrt{x_0 - x}}, \tag{40,5}$$

где $\beta(y)$ — снова функция от y.

Далее, воспользуемся уравнением (39,5):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{40,6}$$

Производная $\partial^2 v_x/\partial y^2$ не обращается, как это видно из (40,2), при $x = x_0$ в бесконечность. То же самое относится и к величине dp/dx, определяющейся движением вне пограничного слоя. Оба же члена в левой стороне уравнения (40,6) обращаются, каждый в отдельности, в бесконечность. В первом приближении можно, следовательно, написать для области вблизи точки отрыва

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

С учетом уравнения непрерывности (40,2), переписываем это уравнение в виде

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x^2 \frac{\partial}{\partial y}\frac{v_x}{v_y} = 0.$$

Поскольку при $x = x_0$ скорость v_x, вообще говоря, не обращается в нуль, то отсюда следует, что отношение v_y/v_x не зависит от y. С другой стороны, из (40,4) и (40,5) имеем с точностью до членов высшего порядка

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\beta(y)}{v_0(y)\sqrt{x_0 - x}}.$$

Для того чтобы это выражение было функцией только от x, необходимо: $\beta(y) = {}^1/_2 A v_0(y)$, где A — численная постоянная. Таким образом,

$$v_y = \frac{A v_0(y)}{2\sqrt{x_0 - x}}. \tag{40,7}$$

Наконец, замечая, что функции α и β в (40,4) и (40,5) связаны друг с другом уравнением $\alpha = 2\beta'$, получаем $\alpha = A dv_0/dy$, так что

$$v_x = v_0(y) + A\frac{dv_0}{dy}\sqrt{x_0 - x}. \tag{40,8}$$

Формулы (40,7—8) определяют характер зависимости функций v_x и v_y от x вблизи точки отрыва. Мы видим, что обе они оказываются разложимыми в этой области по степеням корня $(x_0 - x)^{1/2}$, причем разложение v_y начинается с члена (-1)-й степени, так что v_y обращается при $x \to x_0$ в бесконечность, как $(x_0 - x)^{-1/2}$. При $x > x_0$, т. е. за точкой отрыва, разложение (40,7—8) физически неприменимо, так как корни делаются мнимыми; это свидетельствует о физической бессмысленности продолжения за точку отрыва решений уравнений Прандтля, описывающих движение до этой точки.

В силу граничных условий на самой поверхности тела должно быть всегда $v_x = v_y = 0$ при $y = 0$. Из (40,7) и (40,8) заключаем поэтому, что

$$v_0(0) = 0, \quad \left.\frac{dv_0}{dy}\right|_{y=0} = 0. \tag{40,9}$$

Таким образом, мы приходим к важному результату, что в самой точке отрыва ($x = x_0$, $y = 0$) обращается в нуль не только скорость v_x, но и ее первая производная по y (этот результат принадлежит Прандтлю).

Необходимо подчеркнуть, что равенство $\partial v_x/\partial y = 0$ на линии отрыва имеет место лишь постольку, поскольку при этом же x обращается в бесконечность v_y. Если бы постоянная A в (40,7) случайно оказалась равной нулю (а потому не было бы и $v_y(x_0, y) = \infty$), то точка $x = x_0$, $y = 0$, в которой обращается в нуль производная $\partial v_x/\partial y$, не была бы ничем замечательна и во всяком случае не была бы точкой отрыва. Обращение A в нуль может, однако, произойти лишь чисто случайно и поэтому невероятно. Практически, следовательно, точка на поверхности тела, в которой $\partial v_x/\partial y = 0$, всегда является в то же время точкой отрыва.

Если бы в точке $x = x_0$ не возник отрыв (т. е. если $A = 0$), то при $x > x_0$ было бы $(\partial v_x/\partial y)|_{y=0} < 0$, т. е. при удалении от стенки (при достаточно малых y) v_x делалось бы отрицательным, увеличиваясь по абсолютной величине. Другими словами, за точкой $x = x_0$ жидкость двигалась бы в нижних слоях пограничного слоя в направлении, обратном основному потоку; возникло бы «подтекание» жидкости к этой точке. Подчеркнем, что из такого рода рассуждений еще отнюдь нельзя было бы делать вывод о необходимости отрыва в точке, где $\partial v_x/\partial y = 0$; вся картина течения с подтеканием могла бы (как это и было бы при $A = 0$) находиться целиком в области пограничного слоя, не выходя в область основного потока, между тем как для отрыва характерен именно выход течения в основной объем жидкости.

В предыдущем параграфе было показано, что картина движения в пограничном слое остается при изменении числа Рейнольдса подобной самой себе, причем, в частности, масштабы по координате x остаются неизменными. Отсюда следует, что значение x_0 координаты x, при котором обращается в нуль производная $(\partial v_x/\partial y)|_{y=0}$, не меняется при изменении R. Таким образом, мы приходим к существенному выводу, что положение точки отрыва на поверхности обтекаемого тела не зависит от числа Рейнольдса (до тех пор, разумеется, пока пограничный слой остается ламинарным; см. об этом § 45).

Выясним еще, какими свойствами обладает распределение давления $p(x)$ вблизи точки отрыва. При $y = 0$ левая сторона уравнения (40,6) обращается в нуль вместе с v_x и v_y и остается

$$\nu \left.\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{40,10}$$

Отсюда видно, что знак dp/dx совпадает со знаком $\partial^2 v_x/\partial y^2|_{y=0}$. До тех пор, пока $(\partial v_x/\partial y)|_{y=0} > 0$, о знаке второй производной ничего нельзя сказать. Но поскольку при удалении от стенки v_x положительно и растет (в области до точки отрыва), то в самой точке $x = x_0$, где $\partial v_x/\partial y = 0$, должно во всяком случае быть $\partial^2 v_x/\partial y^2|_{y=0} > 0$. Отсюда заключаем, что

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=x_0} > 0, \tag{40,11}$$

т. е. вблизи точки отрыва жидкость движется от более низкого давления к более высокому. Градиент давления связан с градиентом скорости $U(x)$ вне пограничного слоя соотношением

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx}.$$

Поскольку положительное направление оси x совпадает с направлением основного потока, то $U > 0$, и мы заключаем, что

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0} < 0, \tag{40,12}$$

т. е. вблизи точки отрыва скорость U падает в направлении течения.

Из полученных результатов можно вывести заключение о том, что при обтекании тела в том или ином месте его поверхности должен произойти отрыв. Действительно, на заднем, как и на переднем, конце тела имеется точка, в которой при потенциальном обтекании идеальной жидкостью скорость жидкости обращалась бы в нуль (критическая точка). Поэтому, начиная с некоторого значения x, скорость $U(x)$ должна была бы начать падать, обращаясь в конце концов в нуль. С другой стороны, ясно, что текущая вдоль поверхности тела жидкость тормозится тем сильнее, чем ближе к стенке находится рассматриваемый ее слой (т. е. чем меньше y). Поэтому, раньше чем обратилась бы в нуль скорость $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя, должна была бы обратиться в нуль скорость в непосредственной близости от стенки. Математически это, очевидно, означает, что производная $\partial v_x/\partial y$ во всяком случае должна была бы обратиться в нуль (а поэтому отрыв не может не возникнуть) при некотором x, меньшем, чем то его значение, при котором было бы $U(x)=0$.

В случае обтекания тел произвольной формы все вычисления могут быть произведены совершенно аналогичным образом и приводят к результату, что на линии отрыва обращаются в нуль производные $\partial v_x/\partial y$, $\partial v_z/\partial y$ от обеих касательных к поверхности тела компонент скорости v_x и v_z (ось y по-прежнему направлена по нормали к рассматриваемому участку поверхности тела).

Приведем простое рассуждение, которое показывает необходимость возникновения отрыва в случаях, когда в отсутствии отрыва в обтекающем тело потоке жидкости имелось бы достаточно быстрое возрастание давления (и соответственно этому падение скорости U) в направлении течения. Пусть на малом расстоянии $\Delta x = x_2 - x_1$ давление p испытывает достаточно большое увеличение от значения p_1 до $p_2 (p_2 \gg p_1)$. На том же расстоянии Δx скорость U жидкости вне пограничного слоя падает от исходного значения U_1 до значительно меньшего значения U_2, определяемого уравнением Бернулли:

$$\frac{1}{2}\left(U_1^2 - U_2^2\right) = \frac{1}{\rho}\left(p_2 - p_1\right).$$

Поскольку p не зависит от y, то увеличение давления $p_2 - p_1$ одинаково на всех расстояниях от стенки. При достаточно большом градиенте давления $dp/dx \sim (p_2 - p_1)/\Delta x$ в уравнении движения (40,6) может быть опущен член $\nu\,\partial^2 v_x/\partial y^2$, содержащий вязкость (если только, разумеется, y не слишком мало). Тогда можно и для оценки изменения скорости v в пограничном слое воспользоваться уравнением Бернулли, написав

$$\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = -\frac{1}{\rho}\left(p_2 - p_1\right)$$

или сравнивая с предыдущим равенством:

$$v_2^2 = v_1^2 - \left(U_1^2 - U_2^2\right).$$

Но скорость v_1 в пограничном слое меньше скорости основного потока; можно выбрать такое y, для которого $v_1^2 < U_1^2 - U_2^2$. Скорость v_2 оказывается, таким образом, мнимой, что свидетельствует об отсутствии физически осмысленных решений уравнений Прандтля. В действительности, на участке Δx должен возникнуть отрыв, в результате которого слишком большой градиент давления уменьшается.

Интересным случаем возникновения отрыва является обтекание угла, образованного двумя пересекающимися твердыми поверхностями. При ламинарном потенциальном обтекании выпуклого угла (рис. 3) скорость жидкости на крае угла обратилась бы в бесконечность (см. задачу 6 § 10), возрастая вдоль потока, подходящего к краю, и убывая в потоке, уходящем от него. В действительности, быстрое падение скорости (и соответственно возрастание давления) за краем угла приводит к возникновению отрыва, причем линией отрыва является линия края угла. В результате возникает картина движения, рассмотренная в § 35.

При ламинарном же течении внутри вогнутого угла (рис. 4) скорость жидкости обращается на краю угла в нуль. Падение скорости (и возрастание давления) имеет здесь место в потоке, подходящем к краю угла. Оно приводит, вообще говоря, к возникновению отрыва, причем линия отрыва расположена вверх по течению от края угла.

Задача

Определить наименьший порядок увеличения давления Δp, которое должно иметь место (в основном потоке) на расстоянии Δx, для того чтобы произошел отрыв.

Решение. Пусть y есть такое расстояние от поверхности тела, на котором, с одной стороны, уже можно применить уравнение Бернулли, а с другой стороны, такое, что квадрат $v^2(y)$ скорости v в пограничном слое здесь меньше изменения $|\Delta U^2|$ квадрата скорости U вне этого слоя. Для $v(y)$ можно написать по порядку величины:

$$v(y) \approx \frac{dv}{dy}\,y \sim \frac{U}{\delta}\,y$$

(где $\delta \sim (\nu l/U)^{1/2}$ — ширина пограничного слоя, l — размеры тела). Приравнивая порядки величины обоих членов в правой стороне уравнения (40,6), получаем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{\Delta x} \sim \nu \frac{v(y)}{y^2} \sim \frac{\nu U}{\delta y}.$$

Из условия же

$$v^2 = |\Delta U^2| = 2\Delta p/\rho$$

находим $U^2y^2/\delta^2 \sim \Delta p/\rho$. Исключив y из обоих полученных соотношений, находим окончательно:

$$\Delta p \sim \rho U^2 \left(\frac{\Delta x}{l}\right)^{2/3}.$$

§ 41. Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое

Ламинарное движение в пограничном слое, как и всякое другое ламинарное течение, при достаточно больших числах Рейнольдса становится в той или иной степени неустойчивым. Характер потери устойчивости в пограничном слое аналогичен потере устойчивости при течении по трубе (§ 28).

Число Рейнольдса для течения в пограничном слое меняется вдоль поверхности обтекаемого тела. Так, при обтекании пластинки можно определить число Рейнольдса как $R_x = Ux/\nu$, где x — расстояние от переднего края пластинки, U — скорость жидкости вне пограничного слоя. Более характерным для пограничного слоя, однако, является такое определение, в котором роль размеров играет какая-либо длина, непосредственно характеризующая толщину слоя; в качестве таковой можно выбрать толщину вытеснения, определенную согласно (39,26):

$$R_\delta = \frac{U\delta^*}{\nu} = 1{,}72\sqrt{R_x} \qquad (41{,}1)$$

(числовой коэффициент относится к пограничному слою на плоской поверхности).

Ввиду сравнительной медленности изменения толщины слоя с расстоянием, и малости поперечной скорости жидкости в нем, при исследовании устойчивости течения в небольшом участке пограничного слоя можно рассматривать плоско-параллельное течение с неизменным вдоль оси x профилем [1]). Тогда с матема-

---

[1]) При таком рассмотрении остается, конечно, в стороне вопрос о влиянии, которое может иметь на устойчивость пограничного слоя кривизна обтекаемой поверхности. Имеется также и определенная непоследовательность, связанная с делаемыми пренебрежениями. Дело в том, что единственными плоско-параллельными течениями (с профилем скорости, зависящим только от одной координаты), удовлетворяющими уравнению Навье — Стокса, являются течения с линейным (17,1) и параболическим (17,4) профилями (в то время как уравнение Эйлера удовлетворяется плоско-параллельным течением с произвольным профилем). Поэтому рассматриваемое в теории устойчивости пограничного слоя основное течение не является, строго говоря, решением уравнений движения.