

получаем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \sim \nu \frac{v(y)}{y^2} \sim \frac{\nu U}{\delta y}.$$

Из условия же

$$\sigma^2 = |\Delta U^2| = 2\Delta p/\rho$$

находим $U^2 y^2 / \delta^2 \sim \Delta p / \rho$. Исключив y из обоих полученных соотношений, находим окончательно:

$$\Delta p \sim \rho U^2 \left(\frac{\Delta x}{l} \right)^{2/3}.$$

§ 41. Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое

Ламинарное движение в пограничном слое, как и всякое другое ламинарное течение, при достаточно больших числах Рейнольдса становится в той или иной степени неустойчивым. Характер потери устойчивости в пограничном слое аналогичен потере устойчивости при течении по трубе (§ 28).

Число Рейнольдса для течения в пограничном слое меняется вдоль поверхности обтекаемого тела. Так, при обтекании пластинки можно определить число Рейнольдса как $R_x = Ux/\nu$, где x — расстояние от переднего края пластинки, U — скорость жидкости вне пограничного слоя. Более характерным для пограничного слоя, однако, является такое определение, в котором роль размеров играет какая-либо длина, непосредственно характеризующая толщину слоя; в качестве таковой можно выбрать толщину вытеснения, определенную согласно (39,26):

$$R_\delta = \frac{U\delta^*}{\nu} = 1,72 \sqrt{R_x} \quad (41,1)$$

(числовой коэффициент относится к пограничному слою на плоской поверхности).

Ввиду сравнительной медленности изменения толщины слоя с расстоянием, и малости поперечной скорости жидкости в нем, при исследовании устойчивости течения в небольшом участке пограничного слоя можно рассматривать плоско-параллельное течение с неизменным вдоль оси x профилем¹⁾. Тогда с матема-

¹⁾ При таком рассмотрении остается, конечно, в стороне вопрос о влиянии, которое может иметь на устойчивость пограничного слоя кривизна обтекаемой поверхности. Имеется также и определенная непоследовательность, связанная с делаемыми пренебрежениями. Дело в том, что единственными плоско-параллельными течениями (с профилем скорости, зависящим только от одной координаты), удовлетворяющими уравнению Навье — Стокса, являются течения с линейным (17,1) и параболическим (17,4) профилями (в то время как уравнение Эйлера удовлетворяется плоско-параллельным течением с произвольным профилем). Поэтому рассматриваемое в теории устойчивости пограничного слоя основное течение не является, строго говоря, решением уравнений движения.

тической точки зрения задача будет аналогична задаче об устойчивости течения между двумя параллельными плоскостями (о которой шла речь в § 29). Разница состоит лишь в форме профиля скоростей: вместо симметричного профиля с $v = 0$ на обеих границах здесь имеется несимметричный профиль, в котором скорость меняется от нуля на поверхности тела до заданного значения U — скорости потока вне пограничного слоя. Такое исследование приводит к следующим результатам (*W. Tollmien*, 1929; *H. Schlichting*, 1933; *C. C. Lin*, 1945).

Форма нейтральной кривой на диаграмме ω, R (см. § 28) зависит от формы профиля скоростей в пограничном слое. Если профиль скоростей не имеет точки перегиба (скорость v_x монотонно возрастает, причем кривая $v_x = v_x(y)$ везде выпуклая; рис. 28, а), то граница устойчивости имеет форму, вполне аналогичную той, которая характеризует устойчивость течения в трубе: имеется некоторое минимальное значение $R = R_{кр}$, при котором появляются усиливающиеся возмущения, а при $R \rightarrow \infty$ обе ветви кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс (рис. 29, а). Для профиля скоростей, имеющего место в пограничном слое на плоской пластинке, вычисление дает для критического значения числа Рейнольдса значение ¹⁾ $R_{\delta кр} \approx 420$.

Профиль скоростей типа рис. 28, а не может иметь места, если скорость жидкости вне пограничного слоя уменьшается вниз по течению; в этом случае профиль скоростей непременно должен иметь точку перегиба. Действительно, рассмотрим небольшой участок поверхности стенки, который можно считать плоским, и пусть x есть опять продольная координата вдоль направления течения, а y — расстояние от стенки. Из соотношения (40,10)

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{\partial U}{\partial x}$$

видно, что если U падает вниз по течению ($\partial U / \partial x < 0$), то вблизи поверхности

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} > 0,$$

т. е. кривая $v_x = v_x(y)$ — вогнутая. При увеличении же y скорость v_x должна асимптотически приближаться к конечному пределу U . Уже из геометрических соображений ясно, что для этого кривая должна стать выпуклой, а потому имеет где-то точку перегиба (рис. 28, б).

При наличии точки перегиба в профиле скоростей форма кривой границы устойчивости несколько меняется. Именно, обе

¹⁾ При $R_{\delta} \rightarrow \infty$ на ветвях I и II нейтральной кривой ω обращается в нуль соответственно как $R_{\delta}^{-1/2}$ и $R_{\delta}^{-1/5}$. Точке $R = R_{кр}$ отвечает частота $\omega_{кр} = 0,15 \cdot U / \delta^*$ и волновое число $k_{кр} = 0,36 / \delta^*$.

ветви кривой имеют при $R \rightarrow \infty$ различные асимптоты: одна ветвь по-прежнему асимптотически приближается к оси абсцисс, а на другой ω стремится к конечному, отличному от нуля пределу (рис. 29, б). Кроме того, наличие точки перегиба сильно понижает значение $R_{кр}$.

То обстоятельство, что число Рейнольдса возрастает вдоль пограничного слоя, придает своеобразный характер поведению возмущений при их сносе вниз по течению. Рассмотрим обтекание плоской пластинки и предположим, что в некотором

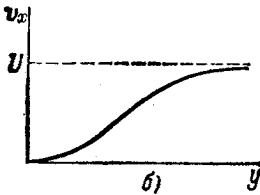
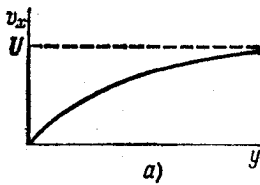


Рис. 28

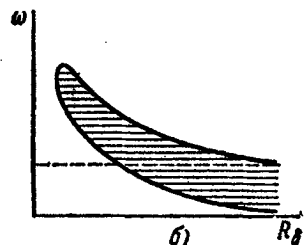
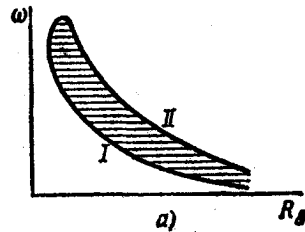


Рис. 29

месте пограничного слоя производится возмущение с заданной частотой ω . Его распространению вниз по течению соответствует на диаграмме рис. 29, а перемещение вправо по горизонтальной прямой $\omega = \text{const}$. При этом возмущение сначала затухает, затем по достижении ветви I границы устойчивости начнет усиливаться. Усиление продолжается до момента достижения ветви II, после чего возмущение вновь будет затухать. Полный коэффициент усиления возмущения за время его прохождения через область неустойчивости очень быстро возрастает по мере того, как эта область сдвигается в сторону больших R (т. е. чем ниже на рис. 29, а расположен соответствующий горизонтальный отрезок между ветвями I и II границы устойчивости).

Вопрос о характере неустойчивости пограничного слоя по отношению к бесконечно малым возмущениям (абсолютном или конвективном) еще не имеет полного решения. Для профиля скоростей без точки перегиба неустойчивость является конвективной в той области значений R , где обе ветви нейтральной кривой (рис. 29, а) близки к оси абсцисс (сюда относится то же самое доказательство, что и для плоского пуазейлевого тече-

ния — см. примечание на с. 150). Для меньших значений R , а также для профилей скорости с точкой перегиба вопрос остается открытым.

Благодаря изменению числа Рейнольдса вдоль пограничного слоя, турбулизируется не сразу весь слой, а лишь та его часть, для которой R_δ превышает определенное значение. При заданной скорости обтекания это значит, что турбулизация возникает на определенном расстоянии от переднего края; при увеличении скорости это место приближается к переднему краю. Экспериментальные данные показывают, что место возникновения турбулентности в пограничном слое существенно зависит также от интенсивности возмущений в натекающем потоке. По мере уменьшения степени возмущенности наступление турбулентности отодвигается к более высоким значениям R_δ .

Различие между нейтральными кривыми на рис. 29, а и 29, б имеет принципиальный характер. Тот факт, что на верхней ветви частота стремится при $R_\delta \rightarrow \infty$ к отличному от нуля пределу, означает, что движение остается неустойчивым при сколь угодно малой вязкости, между тем как в случае кривой типа рис. 23, а при $\nu \rightarrow 0$ возмущения с любой конечной частотой затухают. Это различие обусловлено именно наличием или отсутствием точки перегиба в профиле скоростей $v_x = v(y)$. Его происхождение можно проследить с математической точки зрения, рассмотрев задачу об устойчивости в рамках гидродинамики идеальной жидкости (Rayleigh, 1880).

Подставим в уравнение плоского движения идеальной жидкости (10,10) функцию тока в виде

$$\psi = \psi_0(y) + \psi_1(x, y, t),$$

где ψ_0 — функция тока невозмущенного течения (так что $\psi'_0 = v(y)$), а ψ_1 — малое возмущение. Последнее ищем в виде

$$\psi_1 = \varphi(y) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Подстановка в (10,10) приводит к следующему линеаризованному уравнению для функции ψ_1 ¹⁾:

$$\left(v - \frac{\omega}{k}\right)(\varphi'' - k^2\varphi) - v''\varphi = 0. \quad (41,2)$$

Если границей движения (по оси y) является твердая стенка, то на ней $\varphi = 0$ (как следствие условия $v_y = 0$); если же ширина потока не ограничена (с одной или с обеих сторон), то такое же условие должно быть поставлено на бесконечности, где поток однороден. Будем рассматривать k как заданную вещественную величину; частота же ω определяется тогда по собственным значениям граничной задачи для уравнения (41,2).

¹⁾ Любая функция $\psi_0(y)$ удовлетворяет уравнению (10,10) тождественно; ср. сказанное в примечании на с. 238.

Разделим уравнение (41,2) на $(v - \omega/k)$, умножим на φ^* и проинтегрируем по y между двумя границами движения y_1 и y_2 . Проинтегрировав произведение $\varphi^* \varphi''$ по частям, получим

$$\int_{y_1}^{y_2} (|\varphi'|^2 + k^2 |\varphi|^2) dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{v'' |\varphi|^2}{v - \omega/k} dy = 0. \quad (41,3)$$

Первый член здесь во всяком случае веществен. Предполагая частоту комплексной и отделив мнимую часть равенства, получим:

$$\text{Im } \omega \cdot \int_{y_1}^{y_2} \frac{v'' |\varphi|^2}{|v - \omega/k|^2} dy = 0. \quad (41,4)$$

Для того чтобы могло быть $\text{Im } \omega \neq 0$, должен обращаться в нуль интеграл, а для этого во всяком случае необходимо, чтобы где-либо в области интегрирования v'' проходило через нуль. Таким образом, неустойчивость может возникнуть (при $v = 0$) лишь для профилей скорости с точкой перегиба¹⁾.

С физической точки зрения, происхождение этой неустойчивости связано с «резонансным» взаимодействием между колебаниями среды и движением ее частиц в основном течении, и в этом смысле оно аналогично происхождению известного из кинетической теории затухания (или усиления в неустойчивом случае) Ландау колебаний в бесстолкновительной плазме (см. X, § 30)²⁾.

Согласно уравнению (41,2) собственные колебания течения (если они существуют) связаны с той его частью, где $v''(y) \neq 0$ ³⁾. Проследить за механизмом усиления колебаний удобно на примере профиля скорости, в котором «источник» колебаний локализован в одном слое течения: рассмотрим профиль $v(y)$, кривизна которого мала везде, за исключением лишь окрестности некоторой точки $y = y_0$; заменив ее просто изломом профиля, будем иметь в $v''(y)$ член вида $A\delta(y - y_0)$; именно он будет давать основной вклад в интеграл в уравнении (41,3). Будем описывать течение в системе координат, в которой «источник» по-

¹⁾ Следует отметить, что постановка задачи об устойчивости с точным равенством $v = 0$ физически не вполне корректна. Она не учитывает того факта, что реальная жидкость непременно обладает хотя бы и малой, но отличной от нуля вязкостью. Это приводит к ряду математических затруднений: исчезновению некоторых решений (в виду понижения порядка дифференциального уравнения для функции φ) и появлению новых решений, отсутствующих при $v \neq 0$. Последнее обстоятельство связано с сингулярностью уравнения (41,2) (отсутствующей при $v \neq 0$): в точке, где $v(y) = \omega/k$, обращается в нуль коэффициент при старшей производной в уравнении.

²⁾ Эта аналогия указана А. В. Тимофеевым (1979) и А. А. Андроновым и А. Л. Фабрикантом (1979); ниже мы следуем изложению А. В. Тимофеева.

³⁾ При $v''(y) \equiv 0$ уравнение (41,2) вообще не имеет решений, удовлетворяющих необходимым граничным условиям.

коится, т. е. $v(y_0) = 0$ (как это изображено на рис. 30). Отделив в уравнении (41,3) вещественную часть, получим

$$\int_{y_0}^{y_r} (|\varphi'|^2 + k^2 |\varphi|^2) dy - \frac{A |\varphi(y_0)|^2 \operatorname{Re} \omega/k}{|\omega/k|^2} = 0.$$

Пусть $A > 0$ (как на рис. 30); поскольку первый член в этом равенстве заведомо положителен, то тогда должно быть $\operatorname{Re} \omega/k > 0$ — фазовая скорость волны направлена направо. При этом резонансная точка y_r , в которой фазовая скорость волны совпадает с местной скоростью течения, $v(y_r) = \operatorname{Re} \omega/k$, лежит справа от точки y_0 . Жидкие частицы, движущиеся в окрестности резонансной точки и обгоняющие волну, отдают ей энергию; частицы же, отстающие от волны, отбирают от нее энергию; волна будет усиливаться (неустойчивость), если первых частиц больше чем вторых¹⁾. Но ввиду предполагаемой несжимаемости жидкости число частиц, проходящихся на элемент dy ширины потока, просто пропорционально dy ; тем самым число частиц со скоростями в интервале dv пропорционально $dy = (dy/dv) dv = dv/v'(y)$, т. е. роль функции распределения по скоростям играет $1/v'(y)$. Следовательно, для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы при пересечении точки y_r слева направо функция $1/v'(y)$ возрастала, т. е. $v'(y)$ убывала. Другими словами, должно быть $v''(y_r) < 0$, а поскольку в точке y_0 производная v'' положительна, то где-либо между точками y_0 и y_r должна быть точка перегиба профиля.

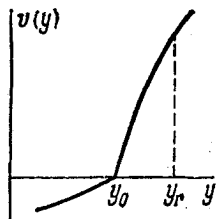


Рис. 30

Аналогичным образом рассматривается (и приводит к тому же результату) случай, когда $A < 0$; при этом фазовая скорость волны и скорость резонансных жидких частиц направлены налево.

§ 42. Логарифмический профиль скоростей

Рассмотрим плоско-параллельный турбулентный поток жидкости, текущий вдоль неограниченной плоской поверхности (когда мы говорим о плоско-параллельности турбулентного потока, то подразумевается, конечно, усредненное по времени движение

¹⁾ По отношению к резонансным частицам движение в волне стационарно; поэтому обмен энергией между ними и волной не обращается в нуль при усреднении по времени (как это имеет место для других частиц, по отношению к которым движение в волне осциллирует). Отметим также, что указанное направление обмена энергией отвечает стремлению к уменьшению градиента скорости течения, и в этом смысле отвечает учету сколь угодно малой вязкости.