

коится, т. е. $v(y_0) = 0$ (как это изображено на рис. 30). Отделив в уравнении (41,3) вещественную часть, получим

$$\int_{y_0}^{y_r} (|\varphi'|^2 + k^2 |\varphi|^2) dy - \frac{A |\varphi(y_0)|^2 \operatorname{Re} \omega/k}{|\omega/k|^2} = 0.$$

Пусть $A > 0$ (как на рис. 30); поскольку первый член в этом равенстве заведомо положителен, то тогда должно быть $\operatorname{Re} \omega/k > 0$ — фазовая скорость волны направлена направо. При этом резонансная точка y_r , в которой фазовая скорость волны совпадает с местной скоростью течения, $v(y_r) = \operatorname{Re} \omega/k$, лежит справа от точки y_0 . Жидкие частицы, движущиеся в окрестности резонансной точки и обгоняющие волну, отдают ей энергию; частицы же, отстающие от волны, отбирают от нее энергию; волна будет усиливаться (неустойчивость), если первых частиц больше чем вторых¹⁾. Но ввиду предполагаемой несжимаемости жидкости число частиц, проходящихся на элемент dy ширины потока, просто пропорционально dy ; тем самым число частиц со скоростями в интервале dv пропорционально $dy = (dy/dv) dv = dv/v'(y)$, т. е. роль функции распределения по скоростям играет $1/v'(y)$. Следовательно, для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы при пересечении точки y_r слева направо функция $1/v'(y)$ возрастала, т. е. $v'(y)$ убывала. Другими словами, должно быть $v''(y_r) < 0$, а поскольку в точке y_0 производная v'' положительна, то где-либо между точками y_0 и y_r должна быть точка перегиба профиля.

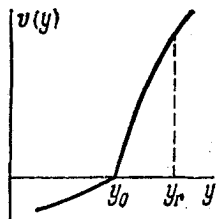


Рис. 30

Аналогичным образом рассматривается (и приводит к тому же результату) случай, когда $A < 0$; при этом фазовая скорость волны и скорость резонансных жидких частиц направлены налево.

§ 42. Логарифмический профиль скоростей

Рассмотрим плоско-параллельный турбулентный поток жидкости, текущий вдоль неограниченной плоской поверхности (когда мы говорим о плоско-параллельности турбулентного потока, то подразумевается, конечно, усредненное по времени движение

¹⁾ По отношению к резонансным частицам движение в волне стационарно; поэтому обмен энергией между ними и волной не обращается в нуль при усреднении по времени (как это имеет место для других частиц, по отношению к которым движение в волне осциллирует). Отметим также, что указанное направление обмена энергией отвечает стремлению к уменьшению градиента скорости течения, и в этом смысле отвечает учету сколь угодно малой вязкости.

в нем)¹⁾. Выберем направление потока в качестве оси x , плоскость стенки — в качестве плоскости x, z , так что y есть расстояние от стенки. Компоненты средней скорости вдоль осей y и z равны нулю: $u_x = u$, $u_y = u_z = 0$. Перепад давления отсутствует; все величины зависят только от y .

Обозначим посредством σ силу трения, действующую на единицу поверхности стенки (и направленную, очевидно, по оси x). Величина σ представляет собой не что иное, как импульс, передаваемый жидкостью твердой стенке; она является в то же время тем постоянным потоком импульса (точнее x -компоненты импульса), который направлен в отрицательном направлении оси y , и определяет количество импульса, непрерывно передаваемого от более удаленных от стенки слоев жидкости к менее удаленным.

Наличие этого потока импульса связано, конечно, с наличием вдоль оси y градиента средней скорости u . Если бы жидкость двигалась везде с одинаковой скоростью, то никакого потока импульса в ней не было бы. Можно поставить вопрос и обратным образом: зададимся некоторым определенным значением σ и выясним, каково должно быть движение в жидкости данной плотности ρ , приводящее к потоку импульса σ . Имея в виду получить асимптотические законы, относящиеся к очень большим числам Рейнольдса, снова исходим из предположения, что в этих законах не должна фигурировать в явном виде вязкость жидкости ν (она становится, однако, существенной на очень малых расстояниях y — см. ниже).

Таким образом, значение градиента скорости du/dy на каждом расстоянии от стенки должно определяться постоянными параметрами ρ , σ и, разумеется, самим расстоянием y . Единственной комбинацией требуемой размерности, которую можно составить из ρ , σ и y , является $(\sigma/\rho)^{1/2}/y$. Поэтому должно быть

$$\frac{du}{dy} \leftarrow \frac{v_*}{ky}, \quad (42,1)$$

где введена удобная для дальнейшего величина v_* (с размерностью скорости) согласно определению

$$\sigma = \rho v_*^2, \quad (42,2)$$

а k — числовая постоянная (*постоянная Кармана*). Значение k не может быть вычислено теоретически и должно быть определено из эксперимента. Оно оказывается равным²⁾

$$k = 0,4. \quad (42,3)$$

¹⁾ Излагаемые в §§ 42—44 результаты принадлежат *Т. Карману* (1930) и *Л. Прандтлю* (1932).

²⁾ Это значение (и значение еще одной постоянной в формуле (42,8) ниже) получено из результатов измерений профиля скорости вблизи стенок труб и прямоугольных каналов и в пограничном слое на плоских стенках.

Интегрируя соотношение (42,1), получим:

$$u = \frac{v_*}{\kappa} (\ln y + c), \quad (42,4)$$

где c — постоянная интегрирования. Для определения этой постоянной нельзя воспользоваться обычными граничными условиями на поверхности стенки: при $y = 0$ первый член в (42,4) обращается в бесконечность. Причина этого заключается в том, что написанное выражение становится в действительности неприменимым на очень малых расстояниях от стенки, поскольку при очень малых y влияние вязкости делается существенным и им нельзя пренебрегать. Условия на бесконечности тоже отсутствуют: при $y = \infty$ выражение (42,4) тоже делается бесконечным. Это связано с тем, что в поставленных нами идеализированных условиях задачи фигурирует бесконечная поверхность стенки, влияние которой простирается поэтому и на бесконечно большие расстояния.

Прежде чем определить постоянную c , укажем предварительно на следующую существенную особенность рассматриваемого движения: оно не имеет никаких характерных постоянных параметров длины, которые могли бы определить масштаб турбулентного движения, как это имеет место в обычных случаях. Поэтому основной масштаб турбулентности определяется самим расстоянием y : турбулентное движение на расстоянии y от стенки имеет основной масштаб порядка величины y . Что же касается пульсационной скорости турбулентного движения, то она — порядка величины v_* . Это тоже следует непосредственно из соображений размерности, поскольку v_* — единственная величина с размерностью скорости, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении величин σ , ρ , y . Подчеркнем, что в то время как средняя скорость падает с уменьшением y , порядок величины пульсационной скорости оказывается одинаковым на всех расстояниях от стенки. Этот результат находится в согласии с общим правилом, что порядок величины пульсационной скорости определяется изменением Δu средней скорости (§ 33). В рассматриваемом случае нет характерных длин l , на которых можно было бы брать изменение средней скорости; Δu должно быть теперь разумным образом определено, как изменение u при изменении расстояния y на величину порядка его самого. Но при таком изменении y скорость u меняется согласно (42,4) как раз на величину порядка v_* .

На достаточно малых расстояниях от стенки начинает играть роль вязкость жидкости; обозначим порядок величины этих расстояний посредством y_0 . Определить y_0 можно следующим образом. Масштаб турбулентного движения на этих расстояниях — порядка y_0 , а скорость — порядка v_* . Поэтому число Рейнольдса, характеризующее движение на расстояниях $\sim y_0$, есть $R \sim$

$\sim y_0 v_* / \nu$. Вязкость начинает играть роль при $R \sim 1$. Отсюда находим, что

$$y_0 \sim \nu / v_* \quad (42,5)$$

чем и определяется интересующее нас расстояние.

На расстояниях $y \ll y_0$ движение жидкости определяется обычным вязким трением. Распределение скоростей здесь может быть получено прямо из обычной формулы для вязкого трения:

$$\sigma = \rho \nu \frac{du}{dy},$$

откуда

$$u = \frac{\sigma}{\rho \nu} y = \frac{v_*^2}{\nu} y \quad (42,6)$$

Таким образом, непосредственно к стенке прилегает тонкая прослойка жидкости, в которой средняя скорость меняется по линейному закону. Величина скорости во всей этой прослойке мала — она меняется от нуля на самой стенке до значений $\sim v_*$ при $y \sim y_0$. Эту прослойку называют *вязким подслоем*. Никакой сколько-нибудь резкой границы между вязким подслоем и остальным потоком, конечно, нет; в этом смысле понятие о вязком подслое имеет лишь качественный характер. Подчеркнем, что и в нем движение жидкости турбулентно¹⁾.

В дальнейшем движении в вязком подслое мы не будем интересоваться вовсе. Наличие его надо учесть только соответствующим выбором постоянной интегрирования в (42,4): она должна быть выбрана так, чтобы было $u \sim v_*$ на расстояниях $y \sim y_0$. Для этого надо положить $c = -\ln y_0$, так что

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y v_*}{\nu} \quad (42,7)$$

Эта формула определяет (при ограниченных y) распределение скоростей в турбулентном потоке, текущем вдоль твердой стенки. Такое распределение называют *логарифмическим профилем скоростей*²⁾.

В формуле (42,7) под знаком логарифма должен был бы на самом деле стоять еще некоторый числовой коэффициент. В написанном виде она имеет, как говорят, лишь *логарифмическую точность*. Это значит, что аргумент логарифма предпола-

¹⁾ В этом смысле все еще иногда применяемое название «ламинарного подслоя» не адекватно. Сходство с ламинарным движением заключается только в том, что средняя скорость распределена по такому же закону, по которому была бы распределена истинная скорость при ламинарном движении в тех же условиях.

Пульсационное движение в вязком подслое обнаруживает своеобразные особенности, не имеющие еще адекватной теоретической интерпретации.

²⁾ Изложенный простой вывод логарифмического профиля дан Л. Д. Ландау (1944).

гается настолько большим, что и сам логарифм велик. Введение небольшого численного коэффициента под знаком логарифма в (42,7) эквивалентно прибавлению к написанному выражению дополнительного члена вида $\text{const} \cdot v_*$, где const — число порядка единицы; в логарифмическом приближении таким членом пренебрегается по сравнению с членом, содержащим большой логарифм. Фактически, однако, аргумент логарифма в рассматриваемых здесь и ниже формулах все же не очень велик, а потому и точность логарифмического приближения не высока. Точность этих формул можно повысить, вводя эмпирический численный множитель в аргумент логарифма, или, что то же самое, прибавляя к логарифму эмпирическую постоянную. Так, более точная формула для профиля скоростей имеет вид:

$$u = v_* \left(2,5 \ln \frac{yv_*}{v} + 5,1 \right) = 2,5v_* \ln \frac{yv_*}{0,13v}. \quad (42,8)$$

Отметим, что обе формулы (42,6) и (42,8) имеют вид:

$$u = v_* f(\xi), \quad \xi = yv_*/v, \quad (42,9)$$

где $f(\xi)$ — универсальная функция. Это — прямое следствие того, что ξ — единственная безразмерная комбинация, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении параметров ρ , σ , v и переменной y . По этой причине такого рода зависимость должна иметь место на всех вообще расстояниях от стенки, в том числе в области, промежуточной между областями применимости формул (42,6) и (42,8). На рис. 31 приведен график функции $f(\xi)$ в полулогарифмическом (десятичном) масштабе. Сплошные линии 1 и 2 отвечают соответственно формулам (42,6) и (42,8); штриховая кривая — эмпирическая зависимость в промежуточной области (она простирается примерно от $\xi \approx 5$ до $\xi \approx 30$).

Легко определить диссипацию энергии в рассматриваемом турбулентном потоке. Величина σ представляет собой среднее значение компоненты Π_{xy} тензора плотности потока импульса. Вне вязкого подслоя в Π_{xy} можно опустить член с вязкостью, так что $\Pi_{xy} = \rho v_x v_y$. Введя пульсационную скорость v' и помня, что средняя скорость направлена по оси x , имеем $v_x = u + v'_x$, $v_y = v'_y$. Тогда ¹⁾

$$\sigma = \rho \langle v_x v_y \rangle = \rho \langle v'_x v'_y \rangle + \rho u \langle v'_y \rangle = \rho \langle v'_x v'_y \rangle. \quad (42,10)$$

Далее, плотность потока энергии в направлении оси y равна $(\rho + \rho v^2/2)v_y$ (здесь тоже опущен вязкий член). Написав

¹⁾ Тензор потока импульса, переносимого турбулентными пульсациями, называют тензором *рейнольдсовых напряжений*; это понятие было введено Рейнольдсом (O. Reynolds, 1895).

$v^2 = (u + v'_x)^2 + v_y'^2 + v_z'^2$ и усреднив все выражение, получим

$$\langle p'v'_y \rangle + \frac{\rho}{2} \langle v_x'^2 v'_y + v_y'^3 + v_z'^2 v'_y \rangle + \rho u \langle v'_x v'_y \rangle.$$

Здесь достаточно сохранить только последний член. Дело в том, что пульсационная скорость — порядка величины v_* и потому

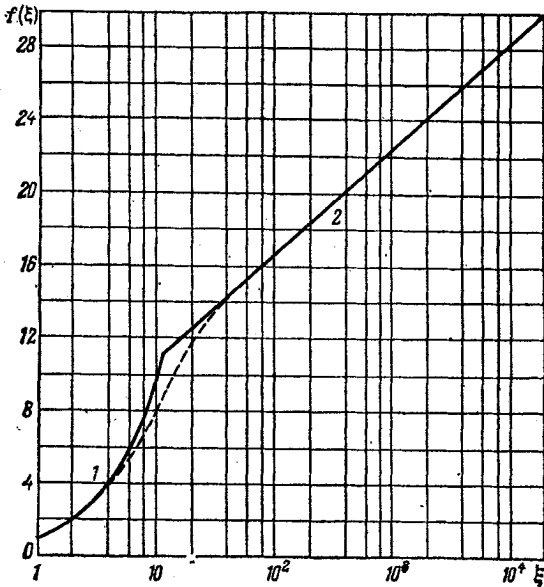


Рис. 31

(с логарифмической точностью) мала по сравнению с u . Что касается давления, то его турбулентные пульсации $p' \sim \rho v_*^2$ и потому с той же точностью первый член в написанном выражении тоже может быть опущен. Таким образом, находим для средней плотности потока энергии:

$$\langle q \rangle = \rho u \langle v'_x v'_y \rangle = u\sigma. \quad (42,11)$$

По мере приближения к поверхности стенки этот поток уменьшается, что связано как раз с диссипацией энергии. Производная $d\langle q \rangle/dy$ дает диссипацию в единице объема жидкости, а разделив ее на ρ , получим диссипацию в единице массы:

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{xy} = \frac{1}{xy} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{3/2}. \quad (42,12)$$

До сих пор мы предполагали, что поверхность стенки достаточно гладкая. Если же поверхность шероховата, то выведенные формулы могут несколько измениться. В качестве меры шерохо-

ватости стенки можно выбрать порядок величины выступов шероховатости, которые мы обозначим посредством d . Существенна сравнительная величина d и толщина подслоя y_0 . Если толщина y_0 велика по сравнению с d , то шероховатость вообще не существенна; это и подразумевается под достаточной гладкостью стенки. Если y_0 и d одного порядка величины, то никаких общих формул написать нельзя.

В обратном же предельном случае сильной шероховатости ($d \gg y_0$) снова можно установить некоторые общие соотношения. Говорить о вязком подслое в этом случае, очевидно, нельзя. Вокруг выступов шероховатости будет происходить турбулентное движение, характеризующееся величинами ρ , σ , d ; вязкость ν , как обычно, не должна входить явно. Скорость этого движения — порядка величины v_* — единственной имеющейся в нашем распоряжении величины с размерностью скорости. Таким образом, мы видим, что в потоке, текущем вдоль шероховатой поверхности, скорость делается малой ($\sim v_*$) на расстояниях $y \sim d$ вместо $y \sim y_0$, как это было при течении вдоль гладкой поверхности. Отсюда ясно, что распределение скоростей будет определяться формулой, получающейся из (42,7) заменой ν/v_* на d ,

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y}{d}. \quad (42,13)$$

§ 43. Турбулентное течение в трубах

Применим теперь полученные результаты к турбулентному течению жидкости по трубе. Вблизи стенок трубы (на расстояниях, малых по сравнению с ее радиусом a) ее поверхность можно приближенно рассматривать как плоскую и распределение скоростей должно описываться формулой (42,7) или (42,8). Однако ввиду медленного изменения функции $\ln y$ можно с логарифмической точностью применить формулу (42,7) и к средней скорости U течения жидкости в трубе, написав в этой формуле вместо y радиус a трубы:

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{av_*}{\nu}. \quad (43,1)$$

Под скоростью U мы будем подразумевать количество (объем) жидкости, протекающей в 1 с через сечение трубы, деленное на площадь этого сечения: $U = Q/\rho\pi a^2$.

Для того чтобы связать скорость U с поддерживающим течением перепадом давления $\Delta p/l$ (Δp — разность давлений на концах трубы с длиной l), замечаем следующее. Действующая на все сечение потока жидкости в трубе движущая сила есть $\pi a^2 \Delta p$. Эта сила идет на преодоление трения о стенки. Поскольку отнесенная к единице площади стенки сила трения есть $\sigma = \rho v_*^2$,