ватости стенки можно выбрать порядок величины выступов шероховатости, которые мы обозначим посредством d. Существенна сравнительная величина d и толщина подслоя y_0. Если толщина y_0 велика по сравнению с d, то шероховатость вообще не существенна; это и подразумевается под достаточной гладкостью стенки. Если y_0 и d одного порядка величины, то никаких общих формул написать нельзя.

В обратном же предельном случае сильной шероховатости ($d \gg y_0$) снова можно установить некоторые общие соотношения. Говорить о вязком подслое в этом случае, очевидно, нельзя. Вокруг выступов шероховатости будет происходить турбулентное движение, характеризующееся величинами ρ, σ, d; вязкость ν, как обычно, не должна входить явно. Скорость этого движения — порядка величины v_* — единственной имеющейся в нашем распоряжении величины с размерностью скорости. Таким образом, мы видим, что в потоке, текущем вдоль шероховатой поверхности, скорость делается малой ($\sim v_*$) на расстояниях $y \sim d$ вместо $y \sim y_0$, как это было при течении вдоль гладкой поверхности. Отсюда ясно, что распределение скоростей будет определяться формулой, получающейся из (42,7) заменой ν/v_* на d,

$$u = \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{y}{d}. \tag{42,13}$$

§ 43. Турбулентное течение в трубах

Применим теперь полученные результаты к турбулентному течению жидкости по трубе. Вблизи стенок трубы (на расстояниях, малых по сравнению с ее радиусом a) ее поверхность можно приближенно рассматривать как плоскую и распределение скоростей должно описываться формулой (42,7) или (42,8). Однако ввиду медленного изменения функции $\ln y$ можно с логарифмической точностью применить формулу (42,7) и к средней скорости U течения жидкости в трубе, написав в этой формуле вместо y радиус a трубы:

$$U = \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{a v_*}{\nu}. \tag{43,1}$$

Под скоростью U мы будем подразумевать количество (объем) жидкости, протекающей в 1 с через сечение трубы, деленное на площадь этого сечения: $U = Q/\rho\pi a^2$.

Для того чтобы связать скорость U с поддерживающим течение перепадом давления $\Delta p/l$ (Δp — разность давлений на концах трубы с длиной l), замечаем следующее. Действующая на все сечение потока жидкости в трубе движущая сила есть $\pi a^2 \Delta p$. Эта сила идет на преодоление трения о стенки. Поскольку отнесенная к единице площади стенки сила трения есть $\sigma = \rho v_*^2$, то полная сила трения равна $2\pi a l \rho v_*^2$. Приравнивая оба выражения, находим:

$$\frac{\Delta p}{l} = \rho v_*^2 \frac{2}{a}. \tag{43,2}$$

Уравнения (43,1) и (43,2) определяют в параметрическом виде (параметром является v_*) связь скорости течения жидкости по трубе с перепадом давления в ней. Об этой связи говорят обычно как о *законе сопротивления* трубы. Выражая v_* через $\Delta p/l$ из (43,2) и подставляя в (43,1), получаем закон сопротивления в виде уравнения

$$U = \sqrt{\frac{a\,\Delta p}{2\varkappa^2 \rho l}} \ln\left(\frac{a}{\nu}\sqrt{\frac{a\,\Delta p}{2\rho l}}\right). \tag{43,3}$$

Обычно в этой формуле вводят так называемый коэффициент сопротивления трубы, являющийся безразмерной величиной и определяющийся как отношение

$$\lambda = \frac{2a\,\Delta p/l}{\rho U^2/2}. \tag{43,4}$$

Зависимость λ от безразмерного числа Рейнольдса $\mathrm{R} = 2aU/\nu$ определяется неявным образом уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0{,}88 \ln\left(\mathrm{R}\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}85. \tag{43,5}$$

Мы поставили здесь для $\varkappa$ значение (42,3) и прибавили к логарифму эмпирическую численную постоянную [1]). Определяемый этой формулой коэффициент сопротивления является медленно убывающей функцией числа Рейнольдса. Для сравнения приведем закон сопротивления при ламинарном течении в трубе. Вводя в формулу (17,10) коэффициент сопротивления, получаем:

$$\lambda = 64/\mathrm{R}. \tag{43,6}$$

При ламинарном течении коэффициент сопротивления падает с ростом числа Рейнольдса быстрее, чем при турбулентном течении.

На рис. 32 изображен (в логарифмическом масштабе) график зависимости λ от R. Круто спадающая прямая соответствует ламинарному режиму (формула (43,6)), а более пологая кривая

[1]) Коэффициент перед логарифмом в этой формуле взят в соответствии с коэффициентом в формуле (42,8) логарифмического профиля скоростей. Только при таком условии эта формула имеет теоретический смысл предельной формулы для турбулентного течения при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. Если же выбирать в формуле (43,5) произвольным образом значение обеих входящих в нее постоянных, то она сможет играть роль лишь чисто эмпирической формулы для зависимости λ от R. В таком случае, однако, нет никаких оснований предпочитать ее любой другой, более простой, эмпирической формуле, достаточно хорошо описывающей экспериментальные данные.

(практически тоже близкая к прямой) — турбулентному течению. Переход с первой на вторую происходит по мере увеличения числа Рейнольдса в момент турбулизации течения, который может наступить при различных значениях R в зависимости от конкретных условий течения (от степени «возмущенности» потока); в момент перехода коэффициент сопротивления резко возрастает.

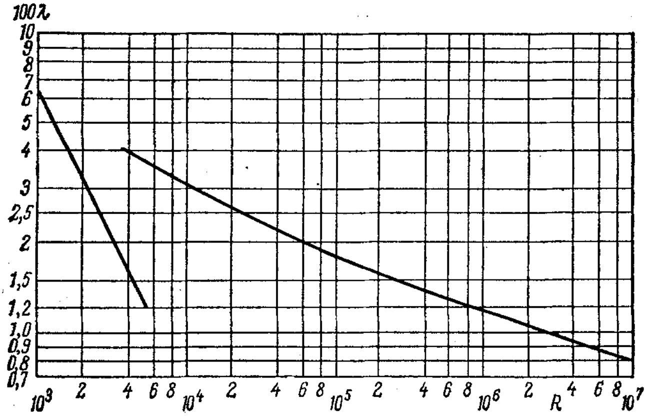

Рис. 32

Написанные выше формулы относятся к трубам с гладкими стенками. Аналогичные формулы для труб с сильно шероховатыми стенками получаются просто заменой ν/v_* на d (ср. (42,13)). Для закона сопротивления получим теперь вместо (43,3) формулу

$$U = \sqrt{\frac{a\,\Delta p}{2\varkappa^2 \rho l}}\ln\frac{a}{d}. \tag{43,7}$$

Под знаком логарифма стоит теперь постоянная величина, не содержащая перепада давления, как это было в (43,3). Мы видим, что средняя скорость течения теперь просто пропорциональна квадратному корню из градиента давления в трубе. Если ввести коэффициент сопротивления, то формула (43,7) примет вид

$$\lambda = \frac{8\varkappa^2}{\ln^2(a/d)} = \frac{1{,}3}{\ln^2(a/d)}, \tag{43,8}$$

т. е. λ — постоянная величина, не зависящая от числа Рейнольдса.

§ 44. Турбулентный пограничный слой

Тот факт, что мы получили для плоско-параллельного турбулентного потока логарифмический закон распределения скоростей формально во всем пространстве, связан с тем, что рас-