

туру, охватывающему обтекаемый профиль. В таком виде, однако, задача о плоском обтекании не однозначна, так как допускает решение при произвольном, заранее заданном скачке потенциала. Для получения однозначного ответа необходимо потребовать выполнения дополнительного условия (С. А. Чаплыгин, 1909)

Это условие заключается в требовании, чтобы скорость жидкости не обращалась в бесконечность на острой задней кромке крыла; напомним в этой связи, что при огибании угла идеальной жидкостью скорость в вершине угла обращается, вообще говоря, в бесконечность по степенному закону (задача 6 § 10). Можно сказать, что поставленное условие означает, что струи, стекающие с обеих сторон крыла, должны плавно смыкаться без того, чтобы поворачивать вокруг острого угла. Естественно, что при выполнении этого условия решение задачи о потенциальном обтекании приведет к картине, наиболее близкой к истинной, при которой скорость везде конечна, а отрыв происходит лишь у самой задней кромки. Решение становится после этого вполне однозначным и, в частности, определяется и нужная для вычисления подъемной силы циркуляция Γ .

§ 47. Индуктивное сопротивление

Существенную часть силы сопротивления, испытываемой хорошо обтекаемым крылом (конечного размаха), составляет сопротивление, связанное с диссипацией энергии в тонком турбулентном следе. Это сопротивление называют индуктивным.

В § 21 было показано, каким образом можно вычислить связанную со следом силу сопротивления, рассматривая движение жидкости вдали от тела. Полученная там формула (21,1), однако, в данном случае неприменима. Согласно этой формуле сопротивление определяется интегралом от v_x по площади сечения следа, т. е. расходом жидкости через сечение следа. Но ввиду тонкости следа за хорошо обтекаемым крылом этот расход в данном случае мал, и в рассматриваемом ниже приближении им можно вовсе пренебречь.

Подобно тому как мы поступали в § 21, пишем силу F_x в виде разности полных потоков x -компоненты импульса через плоскости $x = x_1$ и $x = x_2$, проходящие соответственно значительно позади и значительно впереди тела. Написав три компоненты скорости в виде $U + v_x, v_y, v_z$, будем иметь для компоненты Π_{xx} плотности потока импульса выражение $\Pi_{xx} = \rho + \rho(U + v_x)^2$ так что сила сопротивления есть

$$F_x = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) [\rho + \rho(U + v_x)^2] dy dz. \quad (47,1)$$

Ввиду тонкости следа можно пренебречь (в интеграле по плоскости $x = x_1$) интегралом по площади его сечения и, таким образом, интегрировать везде только по области вне следа. Но вне следа движение потенциально и имеет место формула Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2} (\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = p_0 + \frac{\rho U^2}{2},$$

откуда

$$p = p_0 - \rho U v_x - \frac{\rho}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (47,2)$$

Пренебречь здесь квадратичными членами (как это было сделано в § 21) нельзя, так как именно ими определяется в данном случае искомая сила сопротивления. Подставляя (47,2) в (47,1), получим:

$$F_x = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \left[p_0 + \rho U^2 + \rho U v_x + \frac{\rho}{2} (v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) \right] dy dz.$$

Разность интегралов от постоянной величины $p_0 + \rho U^2$ обращается в нуль; исчезает также разность интегралов от $\rho U v_x$, поскольку потоки жидкости $\iint \rho v_x dy dz$ через переднюю и заднюю плоскости должны быть одинаковыми (расходом жидкости через сечение следа в рассматриваемом приближении пренебрегаем). Далее, отодвигая плоскость $x = x_2$ достаточно далеко вперед от тела, будем иметь на ней очень малые значения скорости \mathbf{v} , так что интегралом от $\rho (v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)/2$ по этой плоскости можно пренебречь. Наконец, при обтекании хорошо обтекаемого крыла скорость v_x вне следа мала по сравнению с v_y и v_z . Поэтому в интеграле по плоскости $x = x_1$ можно пренебречь v_x^2 по сравнению с $v_y^2 + v_z^2$. Таким образом, получим:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \iint (v_y^2 + v_z^2) dy dz, \quad (47,3)$$

где интегрирование производится по плоскости $x = \text{const}$, расположенной на большом расстоянии позади тела, причем сечение следа исключается из области интегрирования¹⁾.

Вычисленное таким образом сопротивление хорошо обтекаемого крыла можно выразить через ту же циркуляцию скорости

¹⁾ Формула (47,3) может создать впечатление, что порядок величины скоростей v_y, v_z вообще не убывает с расстоянием x . Это действительно так до тех пор, пока толщина следа мала по сравнению с его шириной, что и предполагалось при выводе формулы (47,3). На очень больших расстояниях позади крыла след в конце концов расширится настолько, что его сечение станет примерно круговым. Формула (47,3) здесь уже неприменима, а v_y, v_z будут быстро убывать с увеличением расстояния.

Γ , которая определяет и подъемную силу. Для этого прежде всего заметим, что на достаточно большом расстоянии от тела скорость слабо зависит от координаты x и потому можно рассматривать $v_y(y, z)$, $v_z(y, z)$ как скорость некоторого двухмерного движения, считая ее не зависящей от x вовсе. Удобно ввести в качестве вспомогательной величины функцию тока (§ 10), так что $v_z = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial z$. Таким образом,

$$F_x = \frac{\rho}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz,$$

где интегрирование по вертикальной координате y производится от $+\infty$ до y_1 и от y_2 до $-\infty$ (y_1, y_2 — координаты верхней и нижней границ следа; см. рис. 18). Ввиду потенциальности движения вне следа ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) имеем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0.$$

Применяя к написанному интегралу двухмерную формулу Грина, получаем поэтому:

$$F_x = -\frac{\rho}{2} \oint \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dl,$$

где интегрирование производится по контуру, огибающему область интегрирования в исходном интеграле ($\partial/\partial n$ — дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру). На бесконечности $\psi = 0$ и, следовательно, надо интегрировать по контуру поперечного сечения следа (сечения плоскостью y, z), в результате чего получаем:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \int \psi \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_1 \right] dz.$$

Здесь надо интегрировать по ширине следа dz , а стоящая в квадратных скобках разность есть скачок производной $\partial\psi/\partial y$ при прохождении через след. Замечая, что $\partial\psi/\partial y = v_z = \partial\varphi/\partial z$, имеем:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)_1 = \frac{d\Gamma}{dz},$$

так что

$$F_x = \frac{\rho}{2} \int \psi \frac{d\Gamma}{dz} dz.$$

Наконец, воспользуемся известной из теории потенциала формулой

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right)_1 \right] \ln r dl,$$

где интегрирование производится по некоторому плоскому контуру, r — расстояние от dl до точки, в которой разыскивается

значение ψ , а в квадратных скобках стоит заданный скачок производной от ψ по направлению нормали к контуру¹⁾). В нашем случае контуром интегрирования является отрезок оси z , так что для значений функции $\psi(y, z)$ на оси z можно написать:

$$\begin{aligned}\psi(0, z) &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_2 \right] \ln |z - z'| dz' = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \ln |z - z'| dz'.\end{aligned}$$

Наконец, подставляя это в F_x , получим окончательно для индуктивного сопротивления следующую формулу:

$$F_x = -\frac{\rho}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \ln |z - z'| dz dz' \quad (47,4)$$

(L. Prandtl, 1918). Длина размаха крыла обозначена здесь посредством $l_x = l$, а начало отсчета z выбрано на одном из его концов.

Если увеличить все размеры по оси z в некоторое число раз (при неизменных Γ), то интеграл (47,4) не изменится²⁾. Это показывает, что полное индуктивное сопротивление крыла не изменяется по порядку величины при увеличении его размаха. Другими словами, индуктивное сопротивление, отнесенное к единице длины крыла, падает с увеличением этой длины³⁾. В противоположность сопротивлению полная подъемная сила

$$F_y = -\rho U \int \Gamma dz \quad (47,5)$$

¹⁾ Эта формула определяет в двухмерной теории потенциала потенциал, создаваемый заряженным плоским контуром с плотностью заряда, равной

$$\frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_1 \right].$$

²⁾ Во избежание недоразумений отметим, что тот факт, что при изменении единиц измерения длины стоящий под знаком интеграла логарифм увеличивается на постоянную, несуществен. Действительно, интеграл, отличающийся от написанного тем, что в нем вместо $\ln |z - z'|$ стоит const , все равно равен нулю, так как $\int \frac{d\Gamma}{dz} dz = \Gamma| = 0$ (на краях следа Γ обращается в нуль).

³⁾ В пределе, при стремлении размаха к бесконечности, отнесенное к единице длины индуктивное сопротивление обращается в нуль. В действительности при этом остается небольшое сопротивление, определяющееся расходом жидкости (т.е. интегралом $\iint v_x dy dz$) в следе, которым мы пренебрегли при выводе формулы (47,3); это сопротивление включает в себя как сопротивление трения, так и остающуюся часть сопротивления, связанного с диссипацией в следе.

растет примерно пропорционально размаху крыла, а отнесенная к единице длины — остается постоянной.

Для фактического вычисления интегралов (47,4) и (47,5) удобен следующий метод. Вместо координаты z вводим новую переменную θ согласно

$$z = \frac{l}{2}(1 - \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (47,6)$$

Распределение же циркуляции задается в виде тригонометрического ряда

$$\Gamma = -2Ul \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta. \quad (47,7)$$

Здесь выполнено условие $\Gamma = 0$ на концах крыла, т. е. при $z = 0, l$ или $\theta = 0, \pi$.

Подставив это выражение в формулу (47,5) и производя интегрирование (учитывая при этом взаимную ортогональность функций $\sin \theta$ и $\sin n\theta$ с $n \neq 1$), получим:

$$F_y = \frac{\rho U^2}{2} \pi l^2 A_1.$$

Таким образом, подъемная сила зависит только от первого коэффициента в разложении (47,7). Для коэффициента подъемной силы (46,2) имеем:

$$C_y = \pi \lambda A_1, \quad (47,8)$$

где введено отношение $\lambda = l/l_x$ размаха крыла к его ширине.

Для вычисления сопротивления перепишем формулу (47,4), производя в ней однократное интегрирование по частям:

$$F_x = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \Gamma(z) \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \frac{dz' dz}{z - z'}. \quad (47,9)$$

Стоящий здесь интеграл по dz' должен быть взят, как легко видеть, в смысле его главного значения. Элементарное вычисление с подстановкой (47,7)¹⁾ приводит к следующей формуле для

¹⁾ При интегрировании по dz' приходится брать интеграл (главное значение)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = \frac{\pi \sin n\theta}{\sin \theta}.$$

При интегрировании же по dz пользуемся тем, что

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

коэффициента индуктивного сопротивления:

$$C_x = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2. \quad (47,10)$$

Коэффициент сопротивления крыла мы определяем как

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 l_x l_z}, \quad (47,11)$$

относя его, как и коэффициент подъемной силы, к площади крыла в плане.

Задача

Определить минимальное значение индуктивного сопротивления, которое может быть достигнуто при заданных подъемной силе и размахе крыла $l_z = l$.

Решение. Из формул (47,8) и (47,10) ясно, что минимальное значение C_x при заданном C_y (т. е. заданном A_1) достигается, если равны нулю все A_n с $n \neq 1$. При этом

$$C_{x \min} = \frac{1}{\pi\lambda} C_y^2. \quad (1)$$

Распределение же циркуляции по размаху крыла дается формулой

$$\Gamma = -\frac{4}{\pi l} U l_x C_y \sqrt{z(l-z)}. \quad (2)$$

Если длина размаха достаточно велика, то движение жидкости вокруг каждого сечения крыла приблизительно соответствует плоскому обтеканию бесконечно длинного крыла с таким профилем сечения. В этом случае можно утверждать, что распределение (2) циркуляции осуществляется при эллиптической в плане (в плоскости x, z) форме крыла с полуосями $l_x/2$ и $l/2$.

§ 48. Подъемная сила тонкого крыла

Задача о вычислении подъемной силы крыла сводится по теореме Жуковского к задаче о вычислении циркуляции Γ . Эта задача может быть решена в общем виде для хорошо обтекаемого

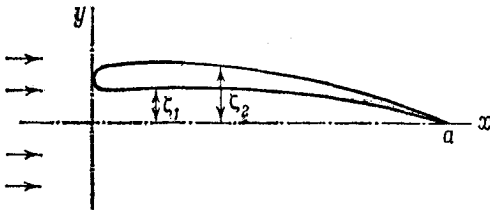


Рис. 37

тонкого крыла бесконечного размаха, с постоянным вдоль размаха профилем сечения (излагаемый ниже метод решения принадлежит *М. В. Келдышу* и *Л. И. Седову*, 1939).

Пусть $y = \xi_1(x)$ и $y = \xi_2(x)$ — уравнения нижней и верхней частей

контура сечения (рис. 37). Мы предполагаем, что этот профиль тонкий, слабо изогнутый и наклонен к направлению обтекания (оси x) под малым углом атаки; другими словами,